Correction de quelques exercices de la feuille de TD 6

Exercice 2. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On pose $A+B=\{a+b\,|\,a\in\mathbb{R},\, b\in\mathbb{R}\}$, l'ensemble des réels qui s'écrivent comme la somme d'un réel de A et d'un réel de B. Supposons que A et B soient deux parties majorées.

1) Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A+B)\leqslant \sup(A)+\sup(B)$.
2) Montrer que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.

Correction :

1) Les parties A et B de $\mathbb{R}$ sont non vides et majorées donc elles admettent des bornes supérieures. Pour tous $a\in A$ et $b\in B$, $a\leqslant \sup(A)$ et $b\leqslant\sup(B)$ donc $a+b\leqslant \sup(A)+\sup(B)$. Ainsi la partie $A+B$ est majorée (par $\sup(A)+\sup(B)$) et non vide donc elle admet une borne supérieure. Par ailleurs $\sup(A)+\sup(B)$ est un majorant de $A+B$ donc
$$\forall y\in A+B,\qquad y\leqslant \sup(A)+\sup(B).$$
2) Il y a plusieurs façon de traiter cette question. L'une d'elle consiste à utiliser le résultat de l'exercice 3 : il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in A$, $\sup(A)-\dfrac{1}{n+1}\leqslant x_n$, $y_n\in B$ et $\sup(B)-\dfrac{1}{n+1}\leqslant x_n$. On alors
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \sup(A)+\sup(B)-\frac{2}{n+1}\leqslant x_n+y_n\leqslant \sup(A+B),$$
puisque $x_n+y_n\in A+B$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, nous obtenons que $\sup(A)+\sup(B)\leqslant\sup(A+B)$. Ainsi $\sup(A)+\sup(B)=\sup(A+B)$, d'après la question précédente.

Exercice 4. Étudier la nature des suites de termes généraux suivants et préciser leur éventuelle limite.

1) $\ln(n+1)$,
2) e^{n^α}, $\alpha>0$,
3) e^{1/n^α}, $\alpha>0$,
4) $n^{1+\sqrt{n}}$,
5) $\dfrac{(-3)^n}{n^2}$,
6) $\dfrac{e^{-n^2}}{n^3}$,
7) $n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
8) $\dfrac{\ln(n^3)}{n^{\sqrt{n}}}$,
9) $\dfrac{n!}{n^n}$,
10) $\dfrac{8^n}{e^{3n}}$,
11) $2^{2n}e^{-3n}$,
12) $\dfrac{3^n-e^n}{3^n+e^n}$,
13) $\dfrac{\sin(n^ne^{n^3})}{n^{3/2}}$,
14) $\dfrac{1}{n}\ln(n+e^{-n})$,
15) $\dfrac{(-1)^{n^2}+(n+1)^2+\cos(1-n)}{4n^2+\sin(\sqrt{n})+10n\ln(n)}$,
16) $\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-n+1}$,
17) $\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}-\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}$,
18) $-n^3+\sqrt{n^6+\sin(10^n)}$,
19) $\cos(n)$,
20) $\sin(n)$.

Les opérations vues en cours sur les suites admettant des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ joueront un rôle capital dans la résolution de cet exercice. On n'utilisera pas de compositions de limites (nous reverrons des exemples lors du chapitre Limite et continuité*) et on se ramènera plutôt à des minorations ou majorations avec des suites de référence. Certaines inégalités vues dans la feuille d'exercice précédentes pourront être utiles. Pour les points 19) et 20), on pourra raisonner par l'absurde.*

Correction : Les 10 premières ont été traitées en cours.

11) On a $2^{2n}e^{-3n}=\left(\dfrac{4}{e^3}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ puisque $\left|\dfrac{4}{e^3}\right|<1$.
12) Traitée en cours.

13) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{\sin(n^n e^{n^3})}{n^{3/2}}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Or $\dfrac{1}{n^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par encadrement, $\left|\dfrac{\sin(n^n e^{n^3})}{n^{3/2}}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

14) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n}\ln(n+e^{-n}) = \frac{1}{n}\ln\left(n\left(1+\frac{e^{-n}}{n}\right)\right) = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{e^{-n}}{n}\right).$$

Par croissances comparées, on a $\dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ensuite $\dfrac{e^{-n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $1+\dfrac{e^{-n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Comme $\ln$ est continue en 1, nous en déduisons que $\ln\left(1+\dfrac{e^{-n}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1)=0$. Ainsi, par produit, $\dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{e^{-n}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par somme, nous en déduisons que $\dfrac{1}{n}\ln(n+e^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

15) Traitée en cours.

16) On se retrouve face à une forme indéterminée (du type « $\infty-\infty$ »). On utilise la technique de la quantité conjuguée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-n+1} &= \frac{(\sqrt{n^3+n+1})^2-(\sqrt{n^3-n+1})^2}{\sqrt{n^3+n+1}+\sqrt{n^3-n+1}}\\
&= \frac{(n^3+n+1)-(n^3-n+1)}{\sqrt{n^3+n+1}+\sqrt{n^3-n+1}}\\
&= \frac{2n}{\sqrt{n^3+n+1}+\sqrt{n^3-n+1}}
\end{aligned}$$

On se retrouve encore face à une forme indéterminée (du type « ∞/∞ » cette fois). On peut mettre $n^{3/2}$ en facteur au dénominateur :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-n+1} &= \frac{2n}{\sqrt{n^3(1+1/n^2+1/n^3)}+\sqrt{n^3(1-1/n^2+1/n^3)}}\\
&= \frac{2n}{n^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2+1/n^3}+\sqrt{1-1/n^2+1/n^3}}.
\end{aligned}$$

On a $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\dfrac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue en 1 donc

$$\sqrt{1+1/n^2+1/n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1-1/n^2+1/n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Enfin $\dfrac{2n}{n^{3/2}} = \dfrac{2}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si bien que $\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

17) On utilise la technique de la quantité conjuguée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}-\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} &= \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}\right)^2-\left(\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}\right)^2}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}}\\
&= \frac{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}}.
\end{aligned}$$

Bon on recommence :

$$\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1} = \frac{\left(\sqrt{n^2-1}\right)^2-\left(\sqrt{n^2+1}\right)^2}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{-2}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}.$$

Finalement

$$\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}-\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}} = \frac{-2}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}\,\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}+\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}}$$

et on montre que ce terme tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

18) Traitée en cours.

19) cf. DM 3

20) cf. DM 3

Exercice 5. Soient $q \in]0,+\infty[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{q^n + n^\alpha}{1+\big(\ln(n)\big)^\beta}$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de q, α et β.

Correction : C'est facile.. mais il faut faire plusieurs cas et sous-cas.

- *Premier cas :* $\beta \leqslant 0$

  Dans ce cas, $1+\big(\ln(n)\big)^\beta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \beta < 0 \\ 2 & \text{si} \quad \beta = 0 \end{cases}$.

  — Si $q > 1$, alors $\dfrac{n^\alpha}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparées si $\alpha > 0$, par quotient sinon) donc $q^n + n^\alpha = q^n\left(1+\dfrac{n^\alpha}{q^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

  — Si $q < 1$, alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < 0 \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = 0 \text{ et } \beta < 0 \\ 1/2 & \text{si} \quad \alpha = \beta = 0 \end{cases}$

  — Si $q = 1$, alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha < 0 \text{ et } \beta < 0 \\ 1/2 & \text{si} \quad \alpha < 0 \text{ et } \beta = 0 \\ 2 & \text{si} \quad \alpha = 0 \text{ et } \beta < 0 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = \beta = 0 \end{cases}$

- *Premier cas :* $\beta > 0$

  Dans ce cas $1+\big(\ln(n)\big)^\beta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $1+\big(\ln(n)\big)^{-\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

  — Si $q > 1$, alors $\dfrac{n^\alpha}{q^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparées si $\alpha > 0$, par quotient sinon) et $\dfrac{q^n}{(\ln(n))^\beta} = \dfrac{q^n}{n}\dfrac{n}{(\ln(n))^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (par croissance comparées). Ainsi

  $$u_n = \frac{q^n}{(\ln(n))^\beta}\,\frac{1}{1+(\ln(n))^{-\beta}}\left(1+\frac{n^\alpha}{q^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

  — Si $q \leqslant 1$ et $\alpha \leqslant 0$, alors $(q^n+n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  — Si $q \leqslant 1$ et $\alpha > 0$, alors $\dfrac{n^\alpha}{(\ln(n))^\beta} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (par croissances comparées) et donc

  $$u_n = \frac{n^\alpha}{(\ln(n))^\beta}\,\frac{1}{1+(\ln(n))^{-\beta}}\left(\frac{q^n}{n^\alpha}+1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  $(q^n+n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0.3$, $u_2 = 0.33$, $u_3 = 0.333$, $u_4 = 0.3333...$ et de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0.\underbrace{33333\cdots333}_{n \text{ fois}}$. Montrer que la suite converge vers un réel que l'on précisera.

Correction : On a $u_1 = 0.3 = 3\times 10^{-1}$, $u_2 = 0.33 = 3\times 10^{-1} + 3\times 10^{-2}$, $u_3 = 0.333 = 3\times 10^{-1} + 3\times 10^{-2} + 3\times 10^{-3}$, etc.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} 3 \times 10^{-k} = 3\left(-1 + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^k\right) = 3\left(-1 + \frac{1-(1/10)^{n+1}}{1-1/10}\right)$$
$$= 3 \times \frac{10}{9} \times \left(-\frac{9}{10} + 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right)$$
$$= \frac{10}{3}\left(\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

puisque $\left|\frac{1}{10}\right| < 1$. On pouvait bien sûr s'attendre à ce résultat, n'est-ce pas ?

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs telle que $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

1) Si $\ell < 1$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2) Si $\ell > 1$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.
3) Que dire sur la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $\ell = 1$?

Correction :

1) Supposons que $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [0,1[$. Comme $\ell \leqslant \frac{\ell+1}{2}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 < \sqrt[n]{u_n} \leqslant \frac{1+\ell}{2}$ et donc $0 < u_n \leqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$.

   Puisque $\left|\frac{\ell+1}{2}\right| < 1$, on a $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, nous obtenons alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2) Supposons que $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell > 1$. Comme $\ell \geqslant \frac{1+\ell}{2}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \geqslant \frac{1+\ell}{2}$ et donc $u_n \geqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$.

   Puisque $\frac{\ell+1}{2} > 1$, on a $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par encadrement, nous obtenons alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.
3) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 1$, alors on ne peut rien dire a priori. En effet, par exemple :
   - Regardons le cas où $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissances comparées, on a $\frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $n^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. De plus $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $+\infty$.

     Ici on a utilisé le fait que, si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la suite $(e^{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. Une façon de montrer cela est de se rappeler que $e^x \geqslant 1+x$ pour tout x réel. Par conséquent, pour tout n assez grand (pour que $1 > x_n$), $1 + x_n \leqslant e^{x_n} \leqslant \frac{1}{1-x_n}$. D'où la convergence par encadrement.
   - Regardons le cas où $u_n = 1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a $n^{-1/n} = \frac{1}{n^{1/n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par contre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 12. Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire.

Correction : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers qui converge vers une limite finie ℓ. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{4}$, c'est-à-dire $\ell - \frac{1}{4} \leqslant u_n \leqslant \ell + \frac{1}{4}$. L'intervalle $\left[\ell - \frac{1}{4}, \ell + \frac{1}{4}\right]$ est d'amplitude $\frac{1}{2}$ donc il contient au plus un entier (et il en contient au moins un : l'entier u_{n_0}). Pour tout $n \geqslant n_0$, u_n est un entier qui appartient à cet intervalle donc $u_n = u_{n_0}$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 3)^2$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
2) Étudier les variations de $f : x \in [0, 3] \longmapsto \frac{1}{3}(x - 3)^2$. En déduire les sens de variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites distinctes.
4) Est-ce-que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

Correction :

1) On a $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$ fixé, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$. On a alors $0 \leqslant 3 - u_n \leqslant 3$ donc $0 \leqslant (3 - u_n)^2 \leqslant 9$ et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$. Nous en déduisons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
2) La fonction f est strictement décroissante sur $[0, 3]$. Il s'ensuit que $f \circ f$ est strictement croissante sur $[0, 3]$. On a
$$u_1 = f(u_0) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 = \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad u_2 = f(u_1) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} - 3\right)^2 = \frac{27}{16}.$$
On a $u_2 - u_0 = \frac{27 - 24}{16} > 0$ donc $u_2 > u_0$. Supposons que, $u_{2(n+1)} > u_{2n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Comme $f \circ f$ est strictement croissante, on a alors $u_{2(n+2)} = f \circ f(u_{2(n+1)}) > f \circ f(u_{2n}) = u_{2(n+1)}$. Ainsi par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2(n+1)} > u_{2n}$. Cela signifie que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Ensuite
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2(n+1)+1} = f(u_{2(n+1)} < f(u_{2n}) = u_{2n+1}.$$
Cela signifie que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3) Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et bornées donc le théorème de la limite monotone entraîne qu'elles admettent des limites respectives $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, on a $\ell' = u_1 < u_0 \leqslant \ell$. En particulier $\ell' \neq \ell$.
4) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est absurde. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \frac{u_n^2}{9}$.

1)
   a) Dresser le tableau de variations de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 4 - \frac{x^2}{9}$.
   b) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   c) Montrer qu'il existe des réels λ, a, b et c tels que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f \circ f(x) - x = \lambda(x - 3)(x + 12)(ax^2 + bx + c).$$
   En déduire les points fixes de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}$.
2) Caractériser la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $|u_0| = 12$.
3) Supposons que $|u_0| > 12$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < -12$.
   b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (que l'on explicitera).
4) Supposons que $|u_0| < 12$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-12 < u_n \leqslant 4$.
   b) Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \in [0, 4]$. Montrer que, pour tout $n \geqslant k$, $u_n \in [0, 4]$. En déduire que, dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.
   On étudiera les variations et la nature des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   c) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin [0, 4]$. A quel intervalle appartiennent les termes de la suite (à partir du rang 1) ? Quel est son sens de variations. Montrer que l'on aboutit à une contradiction.

d) Conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction :

1) a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où le tableau de variations (certaines informations de ce tableau découlant de la question suivante) :

x	$-\infty$		-12		0		12		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-12	$\nearrow$	4	$\searrow$	-12	$\searrow$	$-\infty$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) - x = 4 - \frac{x^2}{9} - x = \frac{36 - x^2 - 9x}{9} = \frac{-(x+12)(x-3)}{9}.$$

Ainsi $f(x) - x \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [-12, 3]$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f \circ f(x) - x &= f\left(4 - \frac{x^2}{9}\right) - x = 4 - \frac{1}{9}\left(4 - \frac{x^2}{9}\right)^2 - x \\ &= 4 - \frac{16}{9} + \frac{8x^2}{9^2} - \frac{x^4}{9^3} - x = \frac{1}{9^3}\left(20 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9x^2 - x^4 - 9^3 x\right). \end{aligned}$$

Puisque $f(-12) = -12$ et $f(3) = 3$, on a aussi $f \circ f(-12) = -12$ et $f \circ f(3) = 3$. Ainsi -12 et 3 sont des racines du trinôme ci-dessus. Par conséquent, il existe des réels λ, a, b et c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f \circ f(x) - x = \lambda(x-3)(x+12)(ax^2 + bx + c).$$

On pourrait tout développer et "identifier" pour trouver λ, a, b et c. Plus subtile (mais il ne faut pas aller trop vite pour ne pas se tromper)

- Regardons le coefficient du terme de degré 4 : on a $a\lambda = \dfrac{-1}{9^3}$ donc on peut choisir $a = 1$ et $\lambda = \dfrac{-1}{9^3}$.
- Regardons le coefficient du terme de degré 0 : on a $-3 \cdot 12\, c\lambda = \dfrac{-20 \cdot 9^2}{9^3}$ donc $c = \dfrac{20 \cdot 9^2}{3 \cdot 12} = 45$.
- Regardons le coefficient du terme de degré 1 : on a $\lambda(-36b + 9c) = -1$ donc $-36b + 45 \cdot 9 = 9^3$ donc $b = (45 - 9^2)/4 = -36/4 = -9$.

Le trinôme $aX^2 + bX + c = X^2 - 9X + 45$ admet pour discriminant $-99 < 0$ donc il est à valeurs strictement positives. Nous en déduisons que les points fixes de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}$ sont -12 et 3.

2) Si $u_0 = -12$, alors une récurrence immédiate montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à -12. Si $u_0 = 12$, alors $u_1 = f(12) = 4 - \dfrac{12^2}{9} = -12$ et donc une récurrence immédiate montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à -12.

3) Supposons que $|u_0| > 12$.

a) Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n < -12$.

- *Initialisation :* Si $|u_0| > 12$, alors $\dfrac{u_0^2}{9} > \dfrac{144}{9} = 16$ et donc $u_1 = 4 - \dfrac{u_0^2}{9} < -12$. Ainsi la propriété est vraie au rang 1.
- *Hérédité :* Supposons que $u_n < -12$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque f est strictement croissante sur $]-\infty, -12]$, nous avons $u_{n+1} = f(u_n) < f(-12) = -12$. Donc cette propriété est vraie au rang $n+1$.

Nous en déduisons qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

b) Soit $n \geqslant 1$. Nous avons $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n < 0$ puisque $u_n < -12$ (d'après la question précédente et la question 1b). Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Supposons que la suite est minorée. Dans ce cas elle converge vers un réel ℓ d'après le théorème de la limite monotone. Puisque f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons que ℓ est un point fixe de f, c'est-à-dire $\ell = -12$ ou $\ell = 3$. Par ailleurs $\ell = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n < u_1 < -12$. C'est absurde. Ainsi la suite n'est pas minorée et le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle tend vers $-\infty$.

4) Supposons que $|u_0| < 12$.

a) Nous déduisons du tableau de variations que $u_1 = f(u_0) \in \,]-12, 4]$. Une récurrence analogue à celle de la question précédente nous permet de montrer que $u_n \in \,]-12, 4]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (puisque $]-12, 4]$ est stable par f).

b) Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \in [0, 4]$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant k$, $u_n \in [0, 4]$.

- *Initialisation :* Nous avons supposé que $u_k \in [0, 4]$.
- *Hérédité :* Supposons que $u_n \in [0, 4]$ pour un certain $n \geqslant k$. Puisque f est strictement décroissante sur $[0, 4]$, nous avons $f(4) \leqslant f(u_n) < f(0)$, c'est-à-dire $\dfrac{20}{9} \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Nous en déduisons qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant k$ par récurrence.

On montre ensuite que les suites $(u_{2n})_{n\geqslant k}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant k}$ sont monotones. La technique est classique :

- Si $u_{2k+2} > u_{2k}$, alors $(u_{2n})_{n\geqslant k}$ est croissante. En effet, si $u_{2(n+1)} > u_{2n}$ pour un certain $n \geqslant k$, alors
$$u_{2(n+2)} = f(u_{2n+3}) = f \circ f(u_{2(n+1)}) > f \circ f(u_{2n}) = f(u_{2n+1}) = u_{2(n+1)},$$
car $f \circ f$ est strictement croissante sur $[0, 4]$. Par récurrence nous obtenons alors que, pour tout $n \geqslant k$, $u_{2(n+1)} > u_{2n}$. Il s'ensuit que
$$\forall n \geqslant k, \qquad u_{2(n+1)+1} = f(u_{2(n+1)}) < f(u_{2n}) = u_{2n+1},$$
car f est strictement décroissante. Ainsi $(u_{2n+1})_{n\geqslant k}$ est décroissante.
- Si $u_{2k+2} < u_{2k}$, alors c'est le contraire.

De plus elles sont bornées donc le théorème de la limite monotone entraîne qu'elles convergent. Puisque f est continue sur $[0, 4]$, leurs limites respectives sont des points fixes de f sur $[0, 4]$. Il n'y a qu'une possibilité : ces deux limites sont égales à 3. Nous en déduisons que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 3 et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.

c) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin [0, 4]$, c'est-à-dire $u_n \in \,]-12, 0[$ d'après la question 4a. Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Puisqu'elle est majorée par 0 elle converge vers une limite finie ℓ. Celle limite est donc un point fixe de f sur $[-12, 0]$. On a donc $\ell = -12$. C'est absurde puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $u_0 > -12$.

d) Nous en déduisons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \notin [0, 4]$ et la question 4b entraîne que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.

Exercice 16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$, $u_1 > u_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n}$.

1) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et croissante et convergente et déterminer sa limite. Montrer que l'on aboutit à une contradiction et conclure.

2) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = |u_n - 2|$. Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_{n+2} \leqslant \dfrac{v_{n+1} + v_n}{3}$.

4) On considère $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_{n_0} = v_{n_0}$, $w_{n_0+1} = v_{n_0+1}$ et, pour tout $n \geqslant n_0$, $w_{n+2} = \dfrac{w_{n+1} + w_n}{3}$.

a) Comparer les termes v_n et w_n pour tout $n \geqslant n_0$.

b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

Correction : On vérifie d'abord (par récurrence double immédiate) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a supposé que $u_n \leqslant 1$ donc

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + u_{n-1}} - u_n > \sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}(1 - \sqrt{u_n}) \geqslant 0.$$

Nous en déduisons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle est majorée par hypothèse donc elle converge vers un réel ℓ d'après le théorème de la limite monotone. De plus $\ell \in [u_0, 1] \subset]0, 1]$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, nous obtenons que $\ell = \sqrt{\ell + \ell} = \sqrt{2\ell}$. Comme $\sqrt{\ell} \neq 0$, nous obtenons $\sqrt{\ell} = \sqrt{2}$ et donc $\ell = 2$. C'est absurde.

Nous en déduisons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > 1$.

2) On a donc $u_{N+1} = \sqrt{u_N + u_{N-1}} \geqslant \sqrt{u_N} > 1$ puis $u_{N+2} = \sqrt{u_{N+1} + u_N} > \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Posons $n_0 = N + 2$. Une récurrence immédiate entraîne alors que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > \sqrt{2}$.

3) Pour tout $n \geqslant n_0$,

$$v_{n+2} = |u_{n+2} - 2| = |\sqrt{u_{n+1} + u_n} - 2| = \frac{|u_{n+1} + u_n - 4|}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2} = \frac{|(u_{n+1} - 2) + (u_n - 2)|}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2} \leqslant \frac{v_{n+1} + v_n}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2},$$

d'après l'inégalité triangulaire. Par ailleurs $u_{n+1} + u_n > 2\sqrt{2}$ donc $\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2 > 2 + \sqrt{2\sqrt{2}}$ puisque la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs

$$2 + \sqrt{2\sqrt{2}} - 3 = \sqrt{2\sqrt{2}} - 1 = 8^{1/4} - 1 > 0$$

donc $\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2 > 2 + \sqrt{2\sqrt{2}} > 3$ et donc $\dfrac{1}{\sqrt{u_{n+1} + u_n} + 2} < \dfrac{1}{3}$. Nous en déduisons que $v_{n+2} \leqslant \dfrac{v_{n+1} + v_n}{3}$.

4) a) Pour tout $n \geqslant n_0$,

$$w_{n+2} - v_{n+2} \geqslant \frac{w_{n+1} - v_{n+1}}{3} + \frac{w_n - v_n}{3}.$$

Par récurrence immédiate, $w_n - v_n > 0$ pour tout $n \geqslant n_0$.

b) La suite $(w_n)_{n\geqslant n_0}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2) coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 - \dfrac{r}{3} - \dfrac{1}{3} = 0$. Son discriminant est $\Delta = \dfrac{13}{9}$ donc elle admet deux racines réelles $\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$. Il existe donc des réels λ et μ tels que

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad w_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^n + \mu\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^n.$$

On a $\left|\dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{6}\right| \leqslant \dfrac{1+\sqrt{16}}{6} < 1$ donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Nous en déduisons, par encadrement, que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Finalement $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.
