Correction de quelques exercices de la feuille de TD 4

Exercice 2. Donner une valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

Correction : • Nous avons

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Nous avons aussi

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$ et donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

• Nous avons

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{16}\right)}{2} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{16} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) \geqslant 0$ et donc $\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$. Nous avons aussi

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{16}\right)}{2} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}.$$

Puisque $\frac{\pi}{16} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) \geqslant 0$ et donc $\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$.

Exercice 4. Mettre les complexes suivants sous forme algébrique (c'est-à-dire sous la forme $x+iy$ avec x et y deux réels) :

$$\frac{5-7i}{3-2i}, \qquad \frac{i\sqrt{3}-3}{i-\sqrt{3}}, \qquad (-i)^{2018}, \qquad 2\pi e^{i\pi/8}, \qquad \frac{(i-2)^3+2i\sqrt{5}+9}{(1-i\sqrt{2})^2+3}, \qquad j+2j^2+3j^3.$$

Correction :

- On a $\frac{5-7i}{3-2i} = \frac{(5-7i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{29-11i}{9+4}$.
- On a $\frac{i\sqrt{3}-3}{i-\sqrt{3}} = \frac{(i\sqrt{3}-3)(-i-\sqrt{3})}{(i-\sqrt{3})(-i-\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3}$.
- On a $2017 = 2016+1 = 4\times 504+2$ si bien que $(-i)^{2018} = \left((-i)^4\right)^{504}(-i)^2 = -1$.
- On a $2\pi e^{i\pi/8} = 2\pi\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i2\pi\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\pi\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + 2i\pi\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
- Je vous laisse le faire.
- On a $j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^3 = 1$ donc on trouve $j+2j^2+3j^3 = \frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 7. Écrire $z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Correction : On a $z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{e^{i\pi/4}}{e^{i\pi/3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/12}$.

Mais on a aussi $z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{(1+i)((1-i\sqrt{3}))}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} + i\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$.

En prenant les parties réelles, on obtient que $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$ et donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

En prenant les parties imaginaires, on obtient que $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$ et donc

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 8 – Formule du parallélogramme. Montrer que, pour tous complexes z et z',

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2+|z'|^2).$$

Pourquoi l'appelle-t-on formule du parallélogramme ?

Correction : On a

$$\begin{aligned} |z+z'|^2 + |z-z'|^2 &= (z+z')(\overline{z+z'}) + (z-z')(\overline{z-z'}) \\ &= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) + (z-z')(\overline{z}-\overline{z'}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z} - z\overline{z'} - z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\ &= 2(z\overline{z} + z'\overline{z'}) = 2(|z|^2+|z'|^2). \end{aligned}$$

Exercice 10. Soient z et z' deux complexes de module 1 et tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.

Correction : On a

$$\frac{z+z'}{1+zz'} - \overline{\frac{z+z'}{1+zz'}} = \frac{z+z'}{1+zz'} - \frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{zz'}} = \frac{(z+z')(1+\overline{zz'}) - (\overline{z}+\overline{z'})(1+zz')}{(1+zz')(1+\overline{zz'})}.$$

Le numérateur est égal à

$$z + z' + z\overline{z}\overline{z'} + \overline{z}z'\overline{z'} - \overline{z} - \overline{z'} - z\overline{z}z' - zz'\overline{z'}.$$

Or par hypothèse $z\overline{z} = |z|^2 = 1$ et $z'\overline{z'} = |z'| = 1$ si bien que le numérateur est égal à

$$z + z' + \overline{z'} + \overline{z} - \overline{z} - \overline{z'} - z' - z = 0.$$

Nous en déduisons que $\dfrac{z+z'}{1+zz'} - \overline{\dfrac{z+z'}{1+zz'}} = 0$ si bien que $\dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Soient s, t et u des complexes de module 1. Montrer que $|st+tu+us| = |s+t+u|$.

Correction : On a

$$\begin{aligned}|st+tu+us|^2 &= (st+tu+us)(\overline{st+tu+us})\\ &= (st+tu+us)(\overline{st}+\overline{tu}+\overline{us})\\ &= st\overline{st}+st\overline{tu}+st\overline{us}+tu\overline{st}+tu\overline{tu}+tu\overline{us}+us\overline{st}+us\overline{tu}+us\overline{us}\\ &= 1+s\overline{u}+t\overline{u}+u\overline{s}+1+t\overline{s}+u\overline{t}+s\overline{t}+1,\end{aligned}$$

puisque $s\overline{s}=|s|^2=1$, $t\overline{t}=|t|^2=1$ et $u\overline{u}=|u|^2=1$. On a aussi

$$\begin{aligned}|s+t+u|^2 &= (s+t+u)(\overline{s+t+u})\\ &= s\overline{s}+s\overline{t}+s\overline{u}+t\overline{s}+t\overline{t}+t\overline{u}+u\overline{s}+u\overline{t}+u\overline{u}\\ &= 1+s\overline{t}+s\overline{u}+t\overline{s}+1+t\overline{u}+u\overline{s}+u\overline{t}+1\\ &= |st+tu+us|^2.\end{aligned}$$

Nous en déduisons que $|st+tu+us|=|s+t+u|$.

Exercice 12. Soit $z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kz^k$. *On ira jeter un œil au DM nº 1.*

Correction : Dans le DM1, nous avons montré que, si $x\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{x+nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Nous conjecturons que cette formule reste vraie pour les complexes. Fixons $z\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons

$$P(n)\ :\ « \textstyle\sum_{k=1}^{n} kz^k = x\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1} = \dfrac{z+nz^{n+2}-(n+1)z^{n+1}}{(1-z)^2}. »$$

- *Initialisation :* On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} kz^k = z = \frac{z+z^3-2z^2}{(1-z)^2}$ donc $P(1)$ est vraie.
- *Hérédité :* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$. On a

  $$\sum_{k=0}^{n+1} kz^k = \sum_{k=0}^{n} kz^k + (n+1)z^{n+1} = \frac{z+nz^{n+2}-(n+1)z^{n+1}}{(1-z)^2} + (n+1)z^{n+1},$$

  d'après l'hypothèse de récurrence. Mettons l'expression de droite sous la même dénominateur :

  $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} zx^k &= \frac{z+nz^{n+2}-(n+1)z^{n+1}+(n+1)z^{n+1}(1-z)^2}{(1-z)^2}\\ &= \frac{1+nz^{n+2}-(n+1)z^{n+1}+(n+1)z^{n+1}-2(n+1)z^{n+2}+(n+1)z^{n+3}}{(1-z)^2}\\ &= \frac{z-(n+2)z^{n+2}+(n+1)z^{n+3}}{(1-z)^2}.\end{aligned}$$

  Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, nous en déduisons que $P(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 13. Soient $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{R}^*$, $\theta\in\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$,

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(a+k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(a+k\theta)$,

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin^2(k\theta)$,

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k\cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k\sin(k\theta)$.

Correction :

1) Traitée en cours. Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, la première somme est égale à $n+1$ et la deuxième à 0.

2) D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(a+k\theta)} = e^{ia}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(e^{i\theta})^k = e^{ia}(1+e^{i\theta})^n = e^{ia}e^{in\theta/2}\Big(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\Big)^n = e^{i(a+n\theta/2)}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n.$$

Nous en déduisons que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cos(a+k\theta) = \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(a+k\theta)}\right) = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(a+\frac{n\theta}{2}\right)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\sin(a+k\theta) = \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i(a+k\theta)}\right) = 2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(a+\frac{n\theta}{2}\right).$$

3) Si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, on se ramène à la question 1 :

$$\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1+\cos(2k\theta)}{2} = \frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta) = \frac{n+1}{2}+\frac{\cos(n\theta)\sin((n+1)\theta)}{2\sin(\theta)}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n}\sin^2(k\theta) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1-\cos(2k\theta)}{2} = \frac{n+1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta) = \frac{n+1}{2}-\frac{\cos(n\theta)\sin((n+1)\theta)}{2\sin(\theta)}$$

4) Traitée en cours.

Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, alors la première somme est égale à $n+1$ et la deuxième à 0.

Exercice 14. Simplifier la fraction $\dfrac{1-\cos(3\theta)+\cos(6\theta)-\cos(9\theta)}{\sin(3\theta)-\sin(6\theta)+\sin(9\theta)}$ lorsque $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que le dénominateur est non nul.

Correction : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour commencer, on a :

$$\begin{aligned}
\sin(3\theta)-\sin(6\theta)+\sin(9\theta)=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2\sin\left(\frac{3\theta+9\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{9\theta-3\theta}{2}\right)-\sin(6\theta)=0\\
&\Longleftrightarrow \quad \sin(6\theta)\Big(2\cos(3\theta)-1\Big)=0\\
&\Longleftrightarrow \quad \sin(6\theta) \quad \text{ou} \quad \cos(3\theta)=\frac{1}{2}\\
&\Longleftrightarrow \quad 6\theta\equiv 0\,[\pi] \quad \text{ou} \quad 3\theta\equiv\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad 3\theta\equiv-\frac{\pi}{3}\,[2\pi]\\
&\Longleftrightarrow \quad \theta\equiv 0\left[\frac{\pi}{6}\right] \quad \text{ou} \quad \theta\equiv\frac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \quad \text{ou} \quad \theta\equiv-\frac{\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right].
\end{aligned}$$

Supposons que $\theta \notin \frac{\pi}{6}\mathbb{Z}$, $\theta \in \frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$ et $\theta \in -\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}\mathbb{Z}$. On a

$$1-\cos(3\theta)+\cos(6\theta)-\cos(9\theta) = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\cos(3k\theta) = \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{3}(-1)^k e^{3ik\theta}\right)$$

et

$$\sin(3\theta)-\sin(6\theta)+\sin(9\theta)=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\sin(3k\theta)=-\mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{3}(-1)^k e^{3ik\theta}\right).$$

Puisque $3\theta\notin\pi+2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{3i\theta}\neq-1$ et donc

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k e^{3ik\theta}=\sum_{k=0}^{3}(-e^{3i\theta})^k=\frac{1-(-e^{3i\theta})^4}{1+e^{3i\theta}}=\frac{1-e^{12i\theta}}{1+e^{3i\theta}}=\frac{e^{6i\theta}(e^{-6i\theta}-e^{6i\theta})}{e^{3i\theta/2}(e^{-3i\theta/2}+e^{3i\theta/2})}.$$

Les formules d'Euler donnent

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k e^{3ik\theta}=e^{9i\theta/2}\frac{-2i\sin(6\theta)}{2\cos(3\theta/2)}=e^{9i\theta/2}e^{-i\pi/2}\frac{\sin(6\theta)}{\cos(3\theta/2)}.$$

Ainsi

$$1-\cos(3\theta)+\cos(6\theta)-\cos(9\theta)=\cos\left(\frac{9\theta-\pi}{2}\right)\frac{\sin(6\theta)}{\cos(3\theta/2)}$$

et

$$\sin(3\theta)-\sin(6\theta)+\sin(9\theta)=-\sin\left(\frac{9\theta-\pi}{2}\right)\frac{\sin(6\theta)}{\cos(3\theta/2)}.$$

Nous en déduisons que :

$$\frac{1-\cos(3\theta)+\cos(6\theta)-\cos(9\theta)}{\sin(3\theta)-\sin(6\theta)+\sin(9\theta)}=\frac{\cos\left(\frac{9\theta-\pi}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{9\theta-\pi}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{9\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{9\theta}{2}\right)}=\tan\left(\frac{9\theta}{2}\right).$$

Exercice 15. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\notin2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que $\left|\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)\right|\leqslant\frac{1}{|\sin(x/2)|}$.

Correction : Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\notin2\pi\mathbb{Z}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}=\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k=\frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{i(n+1)x/2}(e^{-i(n+1)x/2}-e^{i(n+1)x/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2}-e^{ix/2})}=e^{inx/2}\frac{-2i\sin((n+1)x/2)}{-2i\sin(x/2)}.$$

En prenant la partie imaginaire, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)=\frac{\sin(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{2i\sin(x/2)}.$$

Ainsi

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)\right|=\left|\frac{\sin(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{2i\sin(x/2)}\right|\leqslant\frac{1}{|\sin(x/2)|},$$

puisque $\sin$ est bornée par 1.

Exercice 19. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

1) $z^3=\dfrac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$,
2) $z^3+3z-2i=0$,
3) $z^6+z^3+1=0$,
4) $z^3-i=6(z+i)$,
5) $z^4=-7-24i$,
6) $z^4=z+\overline{z}$,
7) $\overline{z^7}=\dfrac{1}{z^3}$,
8) $z^n+2z^{n-1}+2z^{n-2}+\cdots+2z^2+2z+1=0$.

Correction :

1) Traitée en cours.

2) Traitée en cours.

3) Traitée en cours.

4) Traitée en cours.

5) Avec la méthode classique, on trouve que :
   - $7-24i$ admet $3-4i$ et $-3+4i$ pour racines carrées dans $\mathbb{C}$.
   - $3-4i$ admet $2-i$ et $-2+i$ pour racines carrées dans $\mathbb{C}$.
   - $-3+4i$ admet $1+2i$ et $-1-2i$ pour racines carrées dans $\mathbb{C}$.

   Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} z^4 = 7-24i \quad &\iff \quad z^2 = 3-4i \quad \text{ou} \quad z^2 = -3+4i \\ &\iff \quad z = 2-i \quad \text{ou} \quad z = -2+i \quad \text{ou} \quad z = 1+2i \quad \text{ou} \quad z = -1-2i. \end{aligned}$$

6) Traitée en cours.

7) Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (on peut exclure 0 puisque l'équation n'est pas définie lorsque $z = 0$). On a

$$\begin{aligned} \overline{z^7} = \frac{1}{z^3} \quad &\iff \quad r^7 e^{-7i\theta} = \frac{1}{r^3 e^{3i\theta}} \\ &\iff \quad r^{10} e^{-4i\theta} = 1 \\ &\iff \quad r^{10} = 1 \quad \text{et} \quad -4\theta \equiv 0\,[2\pi] \\ &\iff \quad r = 1 \quad \text{et} \quad \theta \equiv 0 \left[\frac{\pi}{2}\right] \\ &\iff \quad z = e^0 \quad \text{ou} \quad z = e^{i\pi/2} \quad \text{ou} \quad z = e^{i\pi} \quad \text{ou} \quad z = e^{3i\pi/2} \\ &\iff \quad z \in \{1, i, -1, -i\}. \end{aligned}$$

8) On constante que 1 n'est pas solution. Donnons-nous $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. On a

$$\begin{aligned} z^n + 2z^{n-1} + 2z^{n-2} + \cdots + 2z^2 + 2z + 1 &= -z^n - 1 + 2\sum_{k=0}^{n} z^k \\ &= -z^n - 1 + 2\,\frac{1-z^{n+1}}{1-z} \\ &= \frac{-z^n - 1 + z^{n+1} + z + 2 - 2z^{n+1}}{1-z} \\ &= \frac{-z^n - z^{n+1} + z + 1}{1-z} \\ &= \frac{-z^n(1+z) + z + 1}{1-z} \\ &= \frac{(1-z^n)(1+z)}{1-z}. \end{aligned}$$

   Nous en déduisons que

$$z^n + 2z^{n-1} + 2z^{n-2} + \cdots + 2z^2 + 2z + 1 = 0 \quad \iff \quad z = -1 \quad \text{ou} \quad z^n = 1.$$

   Ainsi les solutions sont -1 et les n racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 20. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k^p$, où $\zeta_k = e^{2ik\pi/n}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Les nombres $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ sont les n racines de $n^{\text{ième}}$ de l'unité, c'est-à-dire les n solutions de l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Correction :

- On a
$$\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k = \prod_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \exp\left(i\pi(n-1)\right) = (-1)^{n-1}.$$

- Si $p \notin n\mathbb{Z}$, alors
$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k^p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2ip\pi/n}\right)^k = \frac{1-\left(e^{2ip\pi/n}\right)^n}{1-e^{2ip\pi/n}} = 0.$$
Si $p \in n\mathbb{Z}$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k^p = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$

Exercice 21. Résoudre de deux façons l'équation $(z+i)^5 = (z-i)^5$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
En déduire que $\tan(\pi/5) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan(2\pi/5) = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Correction :

- *Méthode 1 :* Soit $z \in \mathbb{C}$. En développant (à l'aide du binôme de Newton) de chaque côté, on obtient
$$\begin{aligned}
(z+i)^5 = (z-i)^5 \quad &\iff \quad \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k} i^k z^{5-k} = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(-i)^k z^{5-k}\\
&\iff \quad z^5+5iz^4-10z^3-10iz^2+5z-i = z^5-5iz^4-10z^3+10iz^2+5z+i\\
&\iff \quad 5iz^4-10iz^2-i = -5iz^4+10iz^2+i\\
&\iff \quad 5iz^4-10iz^2-i = 0\\
&\iff \quad 5z^4-10z^2+1 = 0.
\end{aligned}$$
Le discriminant du trinôme $5X^2-10X+1=0$ est $80=(4\sqrt{5})^2$ donc il admet deux racines réelles $1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $1+dfrac2\sqrt{5}$. Par conséquent $(z+i)^5=(z-i)^5$ si et seulement si $z^2 = 5-2\sqrt{5}$ ou $z^2 = 5+2\sqrt{5}$ c'est-à-dire si et seulement si
$$z \in \left\{-\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}, \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}, -\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}, \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}\right\}.$$

- *Méthode 2 :* Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$. On a
$$(z+i)^5 = (z-i)^5 \quad \iff \quad \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1 \quad \iff \quad Z = \frac{z+i}{z-i} \quad \text{et} \quad Z^5 = 1.$$
Si $Z^5 = 1$, alors $|Z| = 1$ et il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $Z = e^{i\theta}$. Ainsi
$$\begin{aligned}
Z^5 = 1 \quad \iff \quad e^{5i\theta} = e^{i0} \quad \iff \quad 5\theta \equiv 0\,[2\pi] \quad &\iff \quad \theta \equiv 0\left[\frac{2\pi}{5}\right]\\
&\iff \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \frac{2k\pi}{5}\\
&\iff \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad Z = e^{2ik\pi/5} = \omega^k,
\end{aligned}$$
avec $\omega = e^{2i\pi/n}$. Puisque, pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, $\omega^{k+5\ell} = e^{2i(k+5\ell)\pi/5} = e^{2ik\pi/5}e^{2i\ell\pi} = e^{2ik\pi/5} = \omega^k$, nous en déduisons que $Z^5 = 1$ si et seulement si $Z \in \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$.

Pour tout $k \in [\![1,4]\!]$, on a
$$\begin{aligned}
\frac{z+i}{z-i} = \omega^k \quad \iff \quad z+i = (z-i)\omega^k \quad &\iff \quad z+i = z\omega^k - i\omega^k\\
&\iff \quad i + i\omega^k = z(\omega^k - 1)\\
&\iff \quad z = i\,\frac{\omega^k+1}{\omega^k-1}
\end{aligned}$$

et

$$i\,\frac{\omega^k+1}{\omega^k-1} = i\,\frac{e^{2ik\pi/5}+1}{e^{2ik\pi/5}-1} = i\,\frac{e^{ik\pi/5}+e^{-ik\pi/5}}{e^{ik\pi/5}-e^{-ik\pi/5}} = i\,\frac{2\cos(k\pi/5)}{2i\sin(k\pi/5)} = \frac{1}{\tan(k\pi/5)}.$$

Nous en déduisons que

$$(z+i)^5 = (z-i)^5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists k \in [\![1,4]\!], \quad z = \frac{1}{\tan(k\pi/5)}.$$

Par stricte croissance de la fonction $\tan$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, on a $0 < \tan(\pi/5) < \tan(2\pi/5)$. Par stricte croissance de la fonction $\tan$ sur $]\pi/2, 3\pi/2[$, on a $\tan(4\pi/5) < \tan(6\pi/5) < 0$. Ainsi

$$\frac{1}{\tan(6\pi/5)} < \frac{1}{\tan(4\pi/5)} < \frac{1}{\tan(2\pi/5)} < \frac{1}{\tan(\pi/5)}.$$

On aussi

$$-\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}} < -\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}} < \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}, \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

Nous en déduisons notamment que

$$\frac{1}{\tan(2\pi/5)} = \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\tan(\pi/5)} = \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}.$$

En prenant l'inverse et en multipliant par les quantités conjuguées, on obtient $\tan(\pi/5) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan(2\pi/5) = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.
