Correction de quelques exercices de la feuille de TD 3

I Images, antécédents, composition de fonctions

Exercice 2. Déterminer $f(I)$ dans les cas suivants :

1) $f : x \longmapsto x^2$ et $I =]-3, +\infty[$,
2) $f : x \longmapsto 2 - x^3$ et $I =]2, +\infty[$,
3) $f : x \longmapsto 1 - |x+2|$ et $I = [-4, -\frac{1}{2}[$,
4) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $I =]-4, 0[\cup]0, 3]$,
5) $f : x \longmapsto \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$ et $I =]-3, 0[\cup]0, 2]$.

On rappelle que, si I est intervalle sur lequel est définie la fonction f, alors $f(I)$ est l'ensemble des images de x par f quand x décrit I, c'est-à-dire $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$.

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) Traitée en cours.
4) Soient x et y des réels vérifiant $y = f(x)$. On a

$$\begin{aligned} x \in I \quad & \iff \quad x \in]-4, 0[\quad \text{ou} \quad x \in]0, 3] \\ & \iff \quad \frac{1}{x} \in]-\infty, -1/4[\quad \text{ou} \quad \frac{1}{x} \in [1/3, +\infty[\\ & \iff \quad \frac{1}{x} \in]-\infty, -1/4[\cup [1/3, +\infty[\end{aligned}$$

Ainsi $f(I) =]-\infty, -1/4[\cup [1/3, +\infty[$.

5) Si $x \in I$, alors $x^2 \in]0, 3[$ donc $\dfrac{1}{x^2} \in]1/9, +\infty[$ et donc

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2} \in]-\infty, 8/9[.$$

Réciproquement, si $y \in]-\infty, 8/9[$, on vérifie que $x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y}} \in]-3, 0[\subset I$ et que $f(x) = y$.

Ainsi $f(I) =]-\infty, 8/9[$.

Exercice 3. Pour les fonctions f et g définies par les expressions suivantes, donner le domaine de définition et une expression de $f \circ g$ et $g \circ f$. On commencera bien entendu par donner les domaines de définitions de f et g.

1) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = x^2$,
2) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ et $g(x) = x^6$,
3) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$,
4) $f(x) = \tan(x)$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,
5) $f(x) = (\ln(x))^2$ et $g(x) = x^2 - 7x + 10$,
6) $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \ln(x^2 - 1)$,
7) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \ln(x^2 - 1)$,
8) $f(x) = e^x$ et $g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x}$.

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) Traitée en cours.

4) Traitée en cours.
5) Traitée en cours.
6) Traitée en cours.
7) On a $D_f = \mathbb{R}^*$ et $D_g =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
   - Soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Le nombre $f(g(x))$ est bien défini si et seulement si $g(x) \neq 0$ si et seulement si $x^2 - 1 \neq 1$ si et seulement si $x \notin \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. Ainsi
   $$D_{f\circ g} =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[.$$
   De plus, pour tout $x \in D_{f\circ g}$, $f \circ g(x) = \dfrac{1}{\ln(x^2-1)}$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Le nombre $g(f(x))$ est bien défini si et seulement si $\dfrac{1}{x} \in D_g =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ si et seulement si $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$. Ainsi $D_{g\circ f} =]-1, 0[\cup]0, 1[$. De plus, pour tout $x \in D_{g\circ f}$, $g \circ f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right)$.
8) On a $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}^*$. Nous en déduisons que $D_{f\circ g} = \mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f \circ g(x) = \exp\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x}\right)$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R}^*$. Par conséquent $D_{g\circ f} = \mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

II Propriétés globales des fonctions réelles de la variable réelle

Exercice 4. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications telles que $f(I) \subset J$.
1) Montrer que, si f et g ont même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante.
2) Montrer que, si f et g sont de monotonies contraires, alors $g \circ f$ est décroissante.

Correction :
1) Supposons que f et g sont croissantes. Donnons-nous x et y dans I tels que $x \leqslant y$. On a alors $f(x) \leqslant f(y)$ puis $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) \leqslant g \circ f(y)$. Ainsi $g \circ f$ est croissante.

   Supposons que f et g sont décroissantes. Donnons-nous x et y dans I tels que $x \leqslant y$. On a alors $f(x) \geqslant f(y)$ puis $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) \leqslant g \circ f(y)$. Ainsi $g \circ f$ est croissante.
2) Supposons que f est croissante et g décroissante. Donnons-nous x et y dans I tels que $x \leqslant y$. On a alors $f(x) \leqslant f(y)$ puis $g(f(x)) \geqslant g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) \geqslant g \circ f(y)$. Ainsi $g \circ f$ est décroissante.

   Supposons que f est décroissante et g croissante. Donnons-nous x et y dans I tels que $x \leqslant y$. On a alors $f(x) \geqslant f(y)$ puis $g(f(x)) \geqslant g(f(y))$, c'est-à-dire $g \circ f(x) \geqslant g \circ f(y)$. Ainsi $g \circ f$ est décroissante.

Exercice 6. Soit I un intervalle symétrique de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire tel que, pour tout $x \in I$, $-x \in I$). Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions paires ou impaires, que dire des fonctions $f + g$ et fg ?

Correction :
- Supposons que f et g sont toutes les deux paires. Soit $x \in I$. On a alors
  $$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$
  et
  $$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x)$$
  Ainsi $f + g$ et fg sont paires.

- Supposons que f et g sont toutes les deux impaires. Soit $x \in I$. On a alors

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x)$$

et

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = \big(-f(x)\big)\big(-g(x)\big) = f(x)g(x) = (fg)(x)$$

Ainsi $f+g$ est impaire et fg est paire.

- Supposons que f est paire et g impaire (ou le contraire : ça ne change rien puisque les rôles de f et g sont symétriques dans $f+g$ et fg). Soit $x \in I$. On a alors

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)\big(-g(x)\big) = f(x)g(x) = -f(x)g(x) = -(fg)(x)$$

Ainsi fg est impaire. Par contre on ne peut rien conclure quant à la parité de $f+g$ en général. En effet :
  - Si $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto x$, alors $f+g$ n'est ni pair ni impair.
  - Si $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto 0$, alors $f+g$ est pair.
  - Si $f : x \longmapsto 0$ et $g : x \longmapsto x$, alors $f+g$ est impair.

Exercice 7. Que dire d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles qui est à la fois monotone et périodique ?

Correction : Montrons qu'une telle fonction est forcément constante sur $\mathbb{R}$.

Soit $T > 0$. Soit f une fonction T-périodique et croissante (le cas décroissant est analogue).

- Si f est constante sur $[0,T]$, alors elle est constante que $\mathbb{R}$ tout entier puisqu'elle est T-périodique.
- Raisonnons par l'absurde : supposons que f n'est pas constante que $[0,T]$ et montrons que cela aboutit à une contradiction. Il existe alors x et y dans $[0,T]$ tels que $x < y$ et $f(x) \neq f(y)$. Puisque f est croissante, nous obtenons que $f(x) < f(y)$. De plus $x + T \geqslant T \geqslant y$ donc la croissance de f entraîne que $f(x+T) \geqslant f(y)$. Ainsi $f(x) \geqslant f(y)$ puisque $f(x+T) = f(y)$. D'où une contradiction. Ainsi f ne peut être que constante que $[0,T]$.

III Étude de fonctions

Exercice 10. Considérons les fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2+4x-6}{2x-3}$ et $g : x \longmapsto x^2+5x+2$.

Notons $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé.

1) Déterminer les domaines de définition, les variations et les limites des fonctions f et g.
2) Montrer que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(3/2, 5)$ et que $\mathscr{C}_g$ est symétrique par rapport à la droite $x = -5/2$. *Ces notions sont définies dans l'exercice* **??**
3) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Correction :

1) - La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3/2\}$ en tant que quotient de deux fonctions qui le sont et telle que celle au dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{3/2\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{3/2\}$,

$$f'(x) = \frac{(4x+4)(2x-3) - 2(2x^2+4x-6)}{(2x-3)^2} = \frac{4x(x-3)}{(2x-3)^2}$$

est du signe de $x(x-3)$. Nous en déduisons le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$3/2$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

auquel on a ajouté les valeurs particulières et les limites (je vous laisse les rédiger correctement).

- La fonction g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x + 5$. D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		$-5/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-17/4$	$\nearrow$	$+\infty$

auquel on a ajouté les valeurs particulières et les limites (je vous laisse les rédiger correctement).

2) D'après l'exercice 8, il suffit de vérifier (je vous laisse le faire) que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f\left(\frac{3}{2} - x\right) + f\left(\frac{3}{2} + x\right) = 10$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g\left(-\frac{5}{2} - x\right) = g\left(-\frac{5}{2} + x\right).$$

3) **A VENIR**

Exercice 11. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \ln(x^{3/4} - 1)$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Montrer (sans utiliser le théorème de la bijection) que f admet une application réciproque que l'on explicitera.

Correction : La fonction $x \longmapsto x^{3/4} - 1$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, nous avons $x^{3/4} - 1 > 0$ si et seulement si $x > 1$. Puisque $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, nous obtenons que $D_f =]1, +\infty[$.

La fonction $x \longmapsto x^{3/4} - 1$ est dérivable sur D_f et la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous en déduisons que f est dérivable sur D_f. De plus

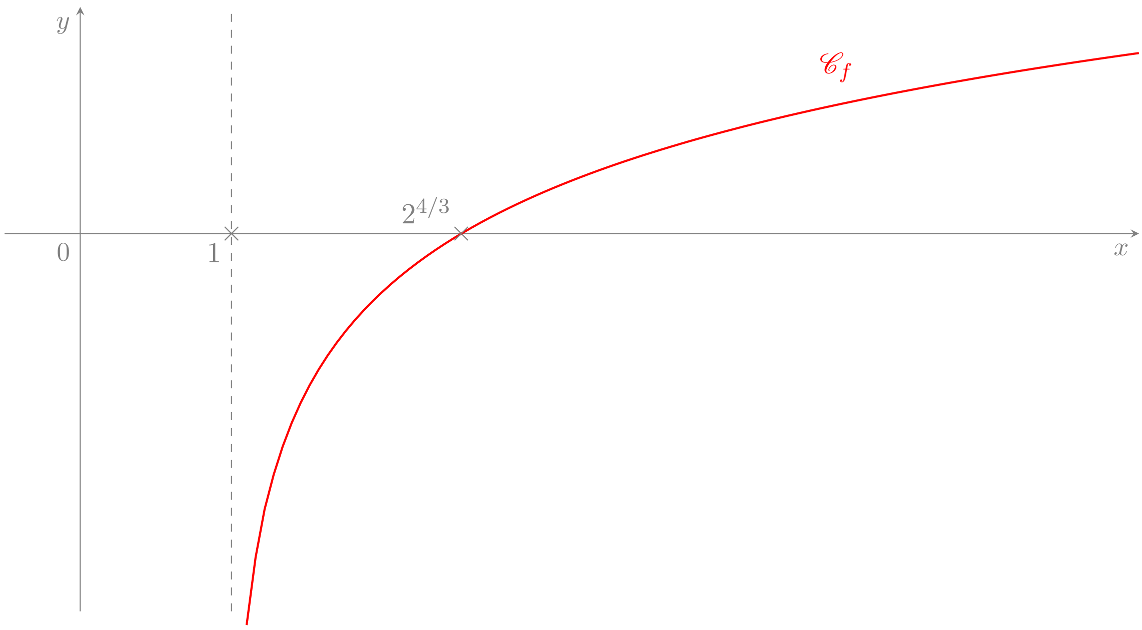
$$\forall x \in D_f, \qquad f'(x) = \frac{\frac{3}{4}x^{-1+3/4}}{x^{3/4} - 1} = \frac{3}{4x^{1/4}(x^{3/4} - 1)} > 0.$$

Nous en déduisons que f est strictement croissante sur $D_f =]1, +\infty[$. Déterminons les limites de f en 1 et en $+\infty$. Nous avons

- $\lim_{x \to 1}(x^{3/4} - 1) = 0$ et $\lim_{y \to 0^+} \ln(y) = -\infty$ si bien que $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \to +\infty}(x^{3/4} - 1) = +\infty$ et $\lim_{y \to +\infty} \ln(y) = +\infty$ si bien que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Soit $x \in D_f$. Nous avons $f(x) = 0$ si et seulement si $x^{3/4} - 1 = 1$, c'est-à-dire $x = 2^{4/3}$.

On construit ensuite le tableau de variation (je vous laisse le faire) puis on trace la courbe représentative de f :



Nous déduisons de la lecture du tableau de variations que tout réel admet un unique antécédent par f. Cela signifie que f est une bijection de D_f dans $\mathbb{R}$ (plus rigoureusement il s'agit du théorème de la bijection, puisque f est continue et strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et $f(D_f) = \mathbb{R}$).

Déterminons la réciproque de f. Donnons-nous $x \in D_f$ et $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\iff \quad y = \ln(x^{3/4} - 1) \\ &\iff \quad e^y = x^{3/4} - 1 \\ &\iff \quad e^y + 1 = x^{3/4} \\ &\iff \quad x = (e^y + 1)^{4/3} \end{aligned}$$

La première équivalence découle du fait que $\exp$ est une bijection sur $\mathbb{R}$. La dernière découle du fait que $1 + e^y > 0$ et $x \longmapsto x^{3/4}$ est une bijection sur $\mathbb{R}_+$.

Nous avons donc montré que la bijection réciproque de f est $f^{-1} : x \in \mathbb{R} \longmapsto (e^x + 1)^{4/3}$.

Exercice 12. Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Correction : La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont et telles que la fonction du dénominateur de s'annule pas sur $\mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}, \qquad f'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

La fonction f est donc strictement décroissante sur tous les intervalles de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in \mathbb{R}$. On remarque aussi que f est impaire et π-périodique, ce qui facilite le tracer (**A VENIR**).

Exercice 13. Étudier (domaine de définition, variation, limites, courbes) les fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \ln(x^2 + x + 2)$,
2) $x \longmapsto x^2 - 8x + 15 - |4 - x|$,
3) $x \longmapsto \sqrt[4]{x^2 - 2x - 3}$.
4) $x \longmapsto -\ln(|x^2 - 3x + 2|)$,
5) $x \longmapsto \dfrac{x^3 + x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 6}$,
6) $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{x^2 + x + 2}\right)$,
7) $x \longmapsto \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{3}\sqrt{|x^2 - 16|}$,
8) $x \longmapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,
9) $x \longmapsto x^{x^3}$,
10) $x \longmapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

Pour les questions 5) et 7), on déterminera des droites asymptotes en $\pm\infty$.

Correction :

1) Traitée en cours

2) Traitée en cours

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$. Puisque la fonction racine quatrième est définie sur $\mathbb{R}_+$, nous obtenons que le domaine de définition de $f : x \longmapsto \sqrt[4]{x^2 - 2x - 3}$ est $D_f =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$.

Puisque la fonction racine quatrième est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nous obtenons que f est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$. Soit $x \in]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$. Nous avons

$$f'(x) = \frac{1}{4}(2x-2)\left(x^2 - 2x - 3\right)^{-3/4} = \frac{x-1}{2}\left(x^2 - 2x - 3\right)^{-3/4}.$$

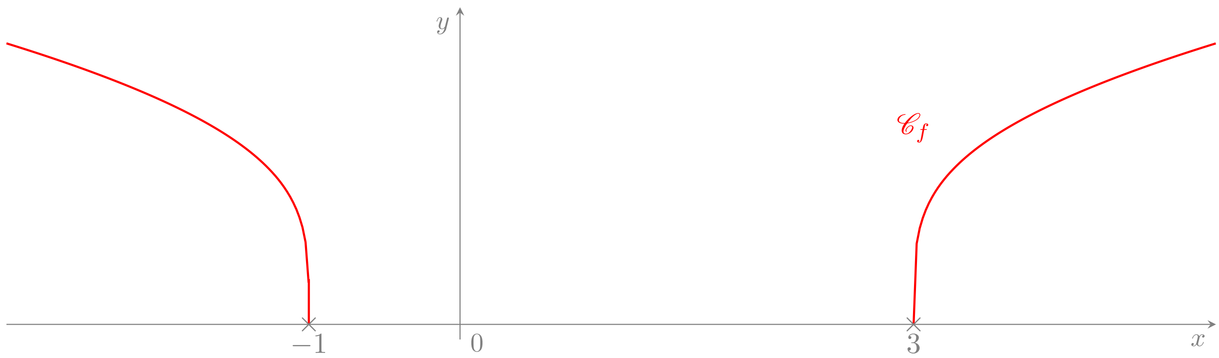
Ainsi $f'(x)$ est du signe de $x - 1$, c'est-à-dire $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 1$. Nous en déduisons que f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[3, +\infty[$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x - 3) = +\infty$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt[4]{y} = +\infty$ si bien que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On a aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 2x - 3) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

On dresse ensuite le tableau de variations de la fonction :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$		$\|$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

puis on trace sa courbe représentative :



4) **A VENIR**

5) **A VENIR**

6) Notons $f : x \longmapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{x^2 + x + 2}\right)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 2 \neq 0$. Ainsi f est définie est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{(2x+1)\pi}{(x^2+x+2)^2}}_{\text{du signe de } -(2x+1)} \cos\left(\frac{\pi}{x^2+x+2}\right).$$

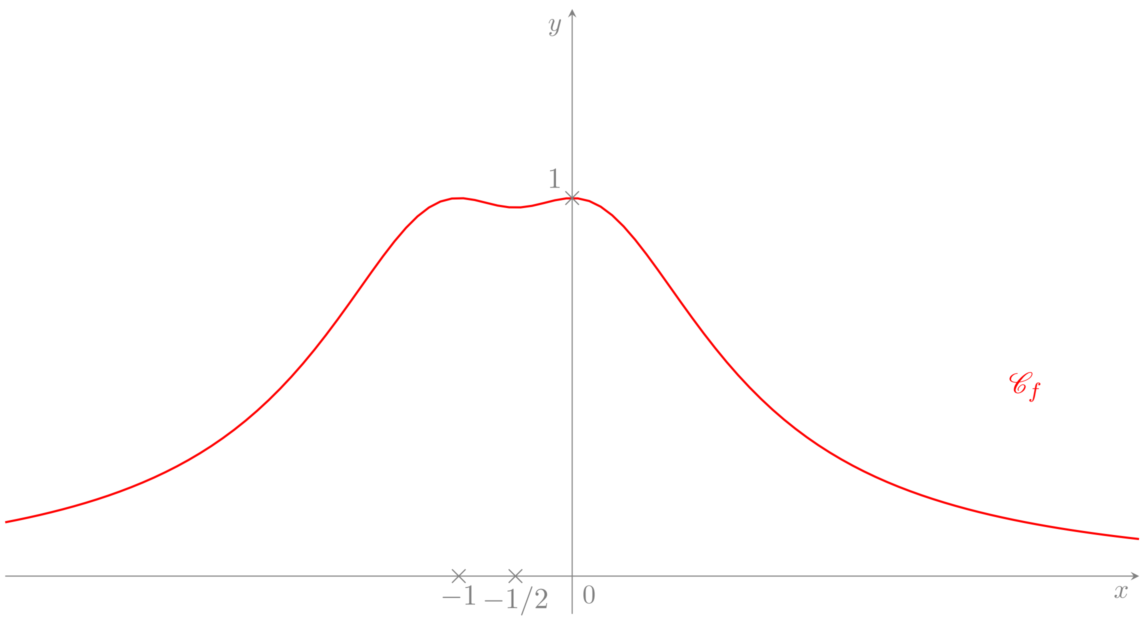
Ensuite on remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < \dfrac{\pi}{x^2+x+2} < \pi$. Par conséquent, $\cos\left(\dfrac{\pi}{x^2+x+2}\right) > 0$ si et seulement si $\dfrac{\pi}{x^2+x+2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ si et seulement si $x^2 + x + 2 \geqslant 2$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$. Nous en déduisons le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On a ajouté les limites : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\pi}{x^2+x+2} = 0$ et $\sin$ est continue en 0 donc

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sin\left(\frac{\pi}{x^2+x+2}\right) = \sin(0) = 0.$$

D'où la courbe :



7) Traitée en cours

8) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont. Il s'agit d'une fonction paire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^x > e^{-x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > -x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > 0$$

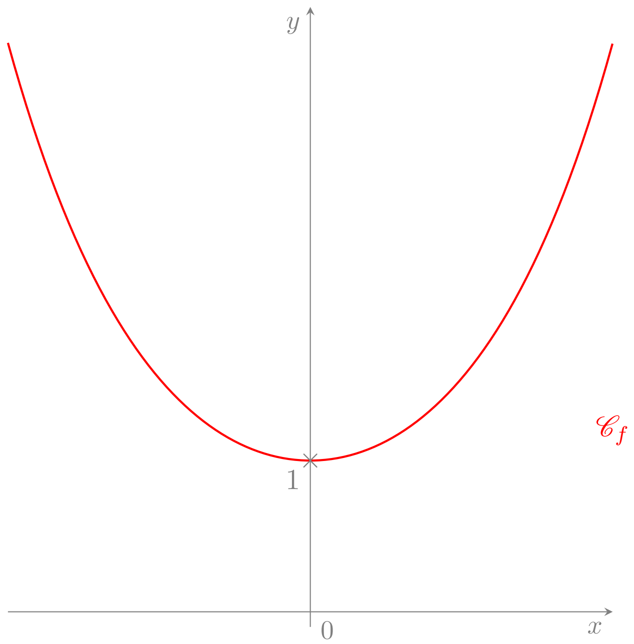
car $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Nous en déduisons le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On l'a complété avec les limites : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ car

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

et par parité. D'où la courbe représentative :



9) Traitée en cours.

10) Étudions la fonction $f : x \longmapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

Son domaine de définition est $D_f = \mathbb{R}_*$ (puisque $x \longmapsto x$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ sont définies sur $\mathbb{R}^*$). La partie entière nous pousse à considérer plusieurs cas :

- Si $x \in]1, +\infty[$, alors $\dfrac{1}{x} \in]0, 1[$ si bien que $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = 0$ et donc $f(x) = 0$.
- Si $x \in]-\infty, -1]$, alors $\dfrac{1}{x} \in [-1, 0[$ si bien que $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = -1$ et donc $f(x) = -x$.
- Si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \left]\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}\right]$, alors $\dfrac{1}{x} \in [k, k+1[$ si bien que $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = k$ et donc $f(x) = kx$.
- Si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in \left]-\dfrac{1}{k}, -\dfrac{1}{k+1}\right]$, alors $\dfrac{1}{x} \in [-(k+1), -k[$ si bien que $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor = -(k+1)$ et donc $f(x) = -(k+1)x$.

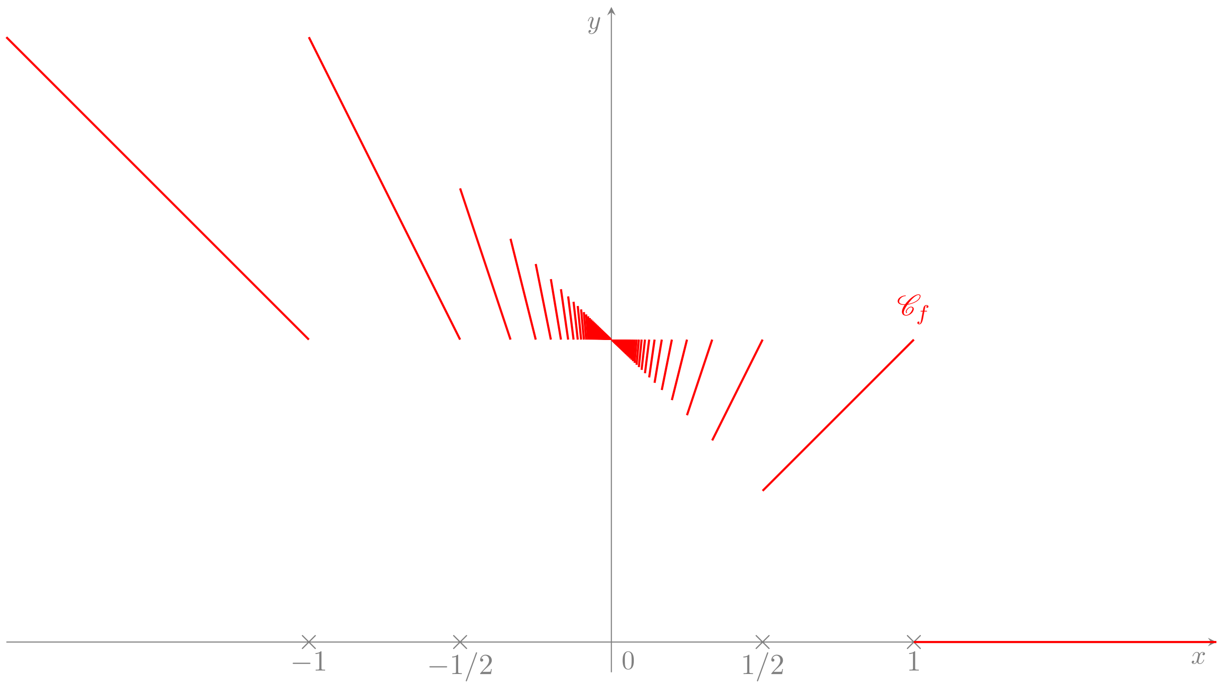
La fonction possède donc un point de discontinuité en tous les réels $\dfrac{1}{k}$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$. Elle est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $\left]-\dfrac{1}{k}, -\dfrac{1}{k+1}\right]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Elle est croissante sur $\left]\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}\right]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Elle est nulle sur $]1, +\infty[$.

Les limites en $\pm\infty$ n'ont pas grand intérêt (f est une fonctions très simple sur $]1, +\infty[$ et sur $]-\infty, -1]$). Étudions les limites en 0. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \dfrac{1}{x}$ par définition de la partie entière de $\dfrac{1}{x}$. Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad 1 - x < f(x) \leqslant 1.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad 1 < f(x) \leqslant 1 - x.$$

Par encadrement (nous reverrons cela plus rigoureusement dans le chapitre 12), nous obtenons que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. On pourra donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. Traçons la courbe de f :



IV Inégalités, équations, inéquations

Exercice 15. Montrer que

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant e^x$.
2) Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(x)| \geqslant |x|$.
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^3}{3!} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$.
4) Pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x)$.

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) **A VENIR**
4) Traitée en cours.

Exercice 16. Résoudre les équations

1) $|4 - x| - |x + 2| + |3x + 5| = 9$,
2) $2e^x - 35e^{-x} = 9$,
3) $2(\ln(x))^2 = 12 + 5\ln(x)$,
4) $x^x = \dfrac{3}{4}\sqrt{6}$,

Correction :

1) **A VENIR**
2) **A VENIR**
3) **A VENIR**
4) Commençons par rappeler que le terme x^x est bien défini si et seulement si $x \in \mathbb{R}_+$. Par ailleurs $0^0 = 1 \neq \dfrac{3}{4}\sqrt{6}$ donc 0 n'est pas solution de l'équation. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
x^x = \frac{3}{4}\sqrt{6} \quad &\iff \quad x\ln(x) = \ln\left(\frac{3}{4}\sqrt{6}\right) \\
&\iff \quad x\ln(x) = \ln(3) - \ln(4) + \ln(\sqrt{6}) \\
&\iff \quad x\ln(x) = \ln(3) - 2\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(3) + \frac{1}{2}\ln(2) \\
&\iff \quad x\ln(x) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

A la deuxième équivalence, on a utilisé le fait que $\exp$ est une bijection sur $\mathbb{R}$.

On remarque tout de suite que $x = \dfrac{3}{2}$ est solution de l'équation. Pour savoir si c'est la seule, étudions la fonction $f : x \longmapsto x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 + \ln(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 1/e$. La fonction f est donc strictement croissante sur $[1/e, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[0, 1/e]$. Par ailleurs $f(1/e) = -1/e$, $f(1) = 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty.$$

On construit alors le tableau de variations de f. Ce dernier nous permet de conclure que tout réel positif admet un unique antécédent qui appartient à $[1, +\infty[$ (d'après le théorème de la bijection). Ainsi $3/2$ est l'unique solution de l'équation.

Exercice 17. Résoudre les inéquations, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

1) $|x+3| + |1-3x| > -2$
2) $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$,
3) $\ln(-x-3) - \ln(x-5) + \ln(x+4) \geqslant 0$,
4) $\ln(-x-3) \geqslant \ln\left(\dfrac{x-5}{x+4}\right)$.

Correction :

1) **A VENIR**
2) **A VENIR**
3) Pour qu'un réel x soit solution de l'inéquation, il faut déjà que $-x-3 > 0$, $x-5 > 0$ et $x+4 > 0$ afin que les trois logarithmes soient bien définis. Il faut donc que $x < -3$, $x > 5$ et $x > -4$. Cette condition n'est vérifiée par aucun réel x. Par conséquent l'inéquation n'admet aucune solution.
4) Pour que l'inéquation, ait un sens, il faut et il suffit que $-x-3 > 0$, $x+4 \neq 0$ et $\dfrac{x-5}{x+4} > 0$ afin que les deux logarithmes soient bien définis. Ces conditions sont équivalentes $x < -3$ et $x \in]-\infty, -4[\cup]5, +\infty[$, c'est-à-dire à $x \in]-\infty, -4[$.

   Donnons-nous $x \in]-\infty, -4[$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\ln(-x-3) \geqslant \ln\left(\frac{x-5}{x+4}\right) \quad &\iff \quad -x-3 \geqslant \frac{x-5}{x+4} \\
&\iff \quad (-x-3)(x+4) \leqslant x-5 \\
&\iff \quad -x^2 - 7x - 12 \leqslant x - 5 \\
&\iff \quad x^2 + 8x + 7 \geqslant 0 \\
&\iff \quad (x-7)(x-1) \geqslant 0 \\
&\iff \quad x - 7 \leqslant 0.
\end{aligned}$$

   A la première équivalence, on a utilisé le fait que $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. A la deuxième, on a utilisé le fait que $x+4 < 0$. A la dernière, on a utilisé le fait que $x-1 < 0$.

   Finalement nous obtenons que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty, 7[$.

Exercice 18. Résoudre les inéquations, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$,

1) $2^n \geqslant 1000000$,
2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \geqslant \frac{7}{2}$,
3) $\dfrac{\ln(2n)}{\ln(\pi/4)} + \ln(5) \leqslant 3\ln(2)$

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\pi/4 \in]0,1[$, on a $\ln(\pi/4) < 0$ et donc

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(2n)}{\ln(\pi/4)} + \ln(5) \leqslant 3\ln(2) \qquad &\iff \qquad \frac{\ln(2n)}{\ln(\pi/4)} \leqslant 3\ln(2) - \ln(5) \\
&\iff \qquad \ln(2n) \geqslant \big(3\ln(2) - \ln(5)\big)\ln(\pi/4) \\
&\iff \qquad n \geqslant \frac{1}{2}\exp\Big(\big(3\ln(2) - \ln(5)\big)\ln(\pi/4)\Big),
\end{aligned}$$

car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Nous en déduisons que

$$\frac{\ln(2n)}{\ln(\pi/4)} + \ln(5) \leqslant 3\ln(2) \qquad \iff \qquad n \geqslant \left\lfloor \frac{1}{2}\exp\Big(\big(3\ln(2) - \ln(5)\big)\ln(\pi/4)\Big) \right\rfloor + 1.$$