Correction de quelques exercices de la feuille de TD 2

Exercice 2. Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geqslant 2$.

Correction : On a $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geqslant 0$. En divisant par le réel strictement positif xy, on obtient :

$$\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}=\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}\geqslant 0.$$

Ainsi $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geqslant 2$.

Exercice 3. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
Indication : on utilisera, après l'avoir montré, le fait qu'un entier naturel et son carré ont la même parité.

Correction : Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. Il existe alors deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$. On choisit p et q de telle sorte que cette fraction soit irréductible.

On a alors $2=\dfrac{p^2}{q^2}$ et donc $p^2=2q^2$. Nous obtenons que p^2 est pair. Nous en déduisons que p est pair. Montrons ce dernier point par contraposée :

> *Si p n'est pas pair, alors p est impair et il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $p=2k+1$. Par conséquent $p^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$ est impair. Par contraposée, si p^2 est pair, alors p aussi.*

Il existe alors $a\in\mathbb{N}$ tel que $p=2a$ si bien que $4a^4=2q^2$ et donc $q^2=2a^2$ est pair. De même nous en déduisons que q est pair. C'est absurde car p et q sont pairs tous les deux et la fraction $\dfrac{p}{q}$ n'est pas irréductible.
Nous en déduisons que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

Exercice 4. Soient x, y et z des nombres réels.

1) Étudier le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité triangulaire renversée.
2) Montrer que $xy\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$ avec égalité si et seulement si $x=y$.
3) Montrer que $(x+y)^2\leqslant 2(x^2+y^2)$ avec égalité si et seulement si $x=y$.
4) Montrer que $|x|+|y|\leqslant|x+y|+|x-y|$ avec égalité si et seulement si $x=y$ ou $x=-y$.
5) Montrer que $xy+yz+xz\leqslant x^2+y^2+z^2$ avec égalité si et seulement si $x=y=z$.

Correction :Soient x, y et z des nombres réels.

1) Si $|x+y|=|x|+|y|$, alors $(x+y)^2=(|x|+|y|)^2$ et donc

$$x^2+y^2+2xy=|x|^2+|y|^2+2|x|\,|y|=x^2+x^2+2|xy|.$$

Nous en déduisons que $xy=|xy|$ et donc que $xy\in\mathbb{R}_+$. Cela signifie que x et y sont de même signe. Réciproquement, si x et y sont de même signe, alors il est immédiat que l'égalité $|x+y|=|x|+|y|$ ait lieu.
Si $|x-y|=||x|-|y||$, alors $(x-y)^2=(|x|-|y|)^2$ et donc

$$x^2+y^2-2xy=|x|^2+|y|^2-2|x|\,|y|=x^2+x^2-2|xy|.$$

Nous en déduisons que $xy=|xy|$ et donc que x et y sont de même signe. Réciproquement, si x et y sont de même signe, alors il est immédiat que l'égalité $|x-y|=||x|-|y||$ ait lieu.

2) On a $\dfrac{x^2+x^2}{2} - xy = \dfrac{x^2+y^2-2xy}{2} = \dfrac{(x-y)^2}{2} \geqslant 0$, d'où l'inégalité voulue. De plus $\dfrac{x^2+x^2}{2} = xy$ si et seulement si $\dfrac{(x-y)^2}{2} = 0$. Ce qui a lieu si et seulement si $x = y$.

3) On a $2(x^2+x^2)-(x+y)^2 = 2x^2+2y^2-x^2-y^2-2xy = x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geqslant 0$, d'où l'inégalité voulue. De plus $2(x^2+x^2) = (x+y)^2$ si et seulement si $(x-y)^2 = 0$. Ce qui a lieu si et seulement si $x = y$.

4) On a

$$\begin{aligned}(|x+y|+|x-y|)^2-(|x|+|y|)^2 &= |x+y|^2+|x-y|^2+2|x+y|\,|x-y|-|x|^2-|y|^2-2|x|\,|y| \\ &= x^2+y^2+2xy+x^2+y^2-2xy+2|(x+y)(x-y)|-x^2-y^2-2|x|\,|y| \\ &= x^2+y^2-2|xy|+2|(x+y)(x-y)| \\ &= (|x|-|y|)^2+2|x^2-y^2| \geqslant 0,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité. Si $|x|+|y| = |x+y|+|x-y|$ alors $0 = (|x|-|y|)^2+2|x^2-y^2|$. Nous en déduisons que $|x| = |y|$ et $x^2 = y^2$. Finalement $x = y$ ou $x = -y$. Réciproquement, on vérifie aisément que, si $x = y$ ou $x = -y$, alors $|x|+|y| = |x+y|+|x-y|$.

5) D'après la question 2, on a $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$, $xz \leqslant \dfrac{x^2+z^2}{2}$ et $zy \leqslant \dfrac{z^2+y^2}{2}$. En sommant ces trois inégalités, on obtient

$$xy+xz+yz \leqslant \frac{x^2+y^2+x^2+z^2+y^2+z^2}{2} = x^2+y^2+z^2.$$

Il y a égalité si et seulement si $2(xy+xz+yz) = x^2+y^2+x^2+z^2+y^2+z^2$. Ce qui a lieu si et seulement si $(x-y)^2+(y-z)^2+(x-y)^2 = 0$. Nous déduisons qu'il y a égalité si et seulement si $x = y = z$ (en effet, si la somme de termes positifs est nulle, alors tous les termes de la somme sont nuls).

Exercice 5.

1) Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ pour tout réel x.
2) Montrer que, pour tous réels x et y, $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0,1\}$.
3) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Correction :

1) Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor = x$ et $\lfloor -x \rfloor = -x$ si bien que $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$.

Supposons que $x \notin \mathbb{Z}$. On a $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor -x \rfloor < -x < \lfloor -x \rfloor + 1$. En sommant ces deux termes, on obtient

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor < 0 < \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor + 2$$

c'est-à-dire $-2 < \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor < 0$. Ainsi $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ est un entier qui se trouve strictement entre -2 et 0. Nous en déduisons que $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $-x \leqslant -\lfloor x \rfloor < 1-x$. Nous avons $\lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$ donc $-y \leqslant -\lfloor y \rfloor < 1-y$. Enfin $\lfloor x+y \rfloor \leqslant x+y < \lfloor x+y \rfloor + 1$ donc $x+y-1 < \lfloor x+y \rfloor \leqslant x+y$. En sommant ces trois inégalités, on obtient

$$-x-y+x+y-1 < \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor < 1-x+1-y+x+y,$$

c'est-à-dire $-1 < \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor < 2$. Ainsi $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ est un entier qui se trouve strictement entre -1 et 2. Il s'agit donc de 0 ou de 1.

3) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor + n < x+n < (\lfloor x \rfloor + n)+1$. Puisque $\lfloor x \rfloor + n \in \mathbb{Z}$ nous obtenons, par unicité de la partie entière du réel $x+n$, que $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Exercice 7. Simplifier les expressions suivantes (fractions irréductibles, puissances de nombres premiers) :

$$2^{n+1}-2^n, \quad 3^n+3^n+3^n, \quad \left(5^{5^n}\right)^{5^n}, \quad \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x^4+4}+\sqrt{x^4+3}},$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et x, y des réels tels que $0 < |y| \leqslant |x|$.

Correction :

- $2^{n+1}-2^n=2^n(2-1)=2^n$.
- $3^n+3^n+3^n=3\cdot 3^n=3^{n+1}$.
- $\left(5^{5^n}\right)^{5^n}=5^{5^n\cdot 5^n}=5^{5^{2n}}$.
- Si $|y|\leqslant|x|$, alors $x^2-y^2\geqslant 0$ donc $\sqrt{x^2-y^2}$ est bien définie. Si $y>0$, alors $x^2>x^2-y^2$ donc $|x|>\sqrt{x^2-y^2}$. En particulier $x-\sqrt{x^2-y^2}\neq 0$ et $x+\sqrt{x^2-y^2}\neq 0$.

  L'expression $\dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$ est donc bien définie.

  Pour la simplifier, on multiplie chaque membre par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{(x+\sqrt{x^2-y^2})^2}{x^2-(x^2-y^2)}+\frac{(x-\sqrt{x^2-y^2})^2}{x^2-(x^2-y^2)}=\frac{4x^2-2y^2}{y^2}.$$

- $\dfrac{1}{\sqrt{x^4+4}+\sqrt{x^4+3}}=\dfrac{\sqrt{x^4+4}-\sqrt{x^4+3}}{(x^4+4)-(x^4+3)}=\sqrt{x^4+4}-\sqrt{x^4+3}$.

Exercice 8. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

1) $|7x-4|=|3-2x|$,
2) $|x-19|=|x+11|$,
3) $13x-5x^2=9$,
4) $(9-x)(x+3)=30$,
5) $6x^4+11x^2-7=0$,
6) $\sqrt{1+x}-\sqrt{4-x}=2$,

Correction :

1) Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$|7x-4|=|3-2x| \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 7x-4=3-2x \\ \text{ou } 7x-4=2x-3 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 9x=7 \\ \text{ou } 5x=1 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x\in\left\{\frac{1}{5},\frac{7}{9}\right\}.$$

2) Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$|x-19|=|x+11| \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x-19=x+11 \\ \text{ou } x-19=-x-11 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -19=11 \\ \text{ou } 2x=8 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x=4.$$

3) Il s'agit d'un équation polynômiale du second degré. Calculons son discriminant : $\Delta=13^2-4(-5)(-9)=169-180=-11<0$. Nous en déduisons qu'elle n'admet pas de solutions réelles.
4) Si $x\in\mathbb{R}$, alors $(9-x)(x+3)=9x+27-x^2-3x=-x^2+6x+27$. Les solutions de l'équation $(9-x)(x+3)=30$ sont donc les solutions de l'équation $x^2-6x+3=0$. Il s'agit d'un équation polynômiale du second degré. Calculons son discriminant : $\Delta=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 3=36-12=24>0$. Elle admet donc deux solutions réelles :

$$\frac{6-\sqrt{24}}{2}=3-\sqrt{6} \qquad \text{et} \qquad \frac{6+\sqrt{24}}{2}=3+\sqrt{6}.$$

5) Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$6x^4+11x^2-7=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 6y^2+11y-7=0 \\ y=x^2 \end{cases}$$

   L'équation $6y^2+11y-7=0$ est polynômiale du second degré. Calculons son discriminant : $\Delta=11^2-4\cdot 6\cdot(-7)(-9)=121+168=289=17^2>0$. Elle admet donc deux solutions réelles :

$$\frac{-11+17}{2\cdot 6}=\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{-11-17}{2\cdot 6}=-\frac{7}{3}.$$

   Ainsi

$$6x^4+11x^2-7=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x^2=\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x^2=-\frac{7}{3} \qquad\Longleftrightarrow\qquad x\in\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

6) Soit x un réel vérifiant $\sqrt{1+x}-\sqrt{4-x}=2$. On a forcément $x\in[-1,4]$ sinon l'équation vérifiée par x n'a pas de sens. On a aussi $\sqrt{1+x}-\sqrt{4-x}>0$ donc $\sqrt{1+x}>\sqrt{4-x}$ et donc $1+x>4-x$ (puisque la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$). Ainsi $x>\dfrac{3}{2}$.

Attention à l'erreur classique, si a et b sont deux réels, alors $a^2=b^2$ si et seulement si $|a|=|b|$. Ainsi, pour pouvoir passer au carrée dans une égalité et obtenir l'équivalence, on doit s'assurer en premier lieu que a et b ont le même signe.

On suppose que $x\in\left]\dfrac{3}{2},4\right]$. Puisqu'a alors $\sqrt{1+x}-\sqrt{4-x}>0$, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x}-\sqrt{4-x}=2 \quad&\iff\quad (\sqrt{1+x}-\sqrt{4-x})^2=4\\
&\iff\quad 1+x+4-x-2\sqrt{(1+x)(4-x)}=4\\
&\iff\quad 1=2\sqrt{(1+x)(4-x)}\\
&\iff\quad 1=4(1+x)(4-x),
\end{aligned}$$

puisque $2\sqrt{(1+x)(4-x)}$ et 1 sont positifs. On développe et on obtient donc que x est solution si et seulement si x est solution de l'équation polynômiale du second degré $4x^2-12x-15=0$. Calculons son discriminant : $\Delta=(-12)^2-4\cdot4\cdot(-15)=3^2\cdot4^2+4^2\cdot3\cdot5=3\cdot4^2\cdot(3+5)=6\cdot8^2>0$. Elle admet donc deux solutions réelles :

$$\frac{12+8\sqrt{6}}{2\cdot4}=\frac{3}{2}+\sqrt{6}\qquad\text{et}\qquad\frac{12-8\sqrt{6}}{2\cdot4}=\frac{3}{2}-\sqrt{6}.$$

- Il est clair que $\dfrac{3}{2}-\sqrt{6}\notin\left]\dfrac{3}{2},4\right]$.
- Il est clair que $\dfrac{3}{2}+\sqrt{6}>\dfrac{3}{2}$. De plus

$$\frac{3}{2}+\sqrt{6}-4=\sqrt{6}-\frac{5}{2}=\frac{\sqrt{24}-5}{2}=\frac{\sqrt{24}-\sqrt{25}}{2}\leqslant 0.$$

  Ainsi $\dfrac{3}{2}+\sqrt{6}\in\left]\dfrac{3}{2},4\right]$.

Ainsi $x=\dfrac{3}{2}+\sqrt{6}$ est l'unique solution de l'équation $\sqrt{1+x}-\sqrt{4-x}=2$.

Exercice 9. Résoudre le système d'équation $\begin{cases}3x+y=12\\ xy=9\end{cases}$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}$.

Correction : Commençons par remarquer que, si les réels x et y sont solutions alors ils ne sont pas nuls (en effet $0\neq9$). Par conséquent :

$$\begin{cases}3x+y=12\\ xy=9\end{cases}\iff\begin{cases}3x^2+yx=12x\\ xy=9\end{cases}\iff\begin{cases}3x^2-12x+9=0\\ y=\dfrac{9}{x}\end{cases}$$

L'équation du second degré $3x^2-12x+9=0$ admet pour discriminant $\Delta=(-12)^2-4\cdot9\cdot3=9\cdot4^2-4\cdot9\cdot3=9\cdot4\cdot(4-3)=36=6^2>0$. Par conséquent elle admet deux solutions $x=\dfrac{12+6}{2\cdot3}=3$ et $x=\dfrac{12-6}{2\cdot3}=1$. Nous en déduisons que

$$\begin{cases}3x+y=12\\ xy=9\end{cases}\iff\begin{cases}x=3\text{ ou }x=1\\ y=\dfrac{9}{x}\end{cases}\iff\begin{cases}x=3\\ y=\dfrac{9}{x}\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{9}{x}\end{cases}$$

L'équation admet donc deux couples de solutions qui sont $(3,3)$ et $(1,9)$.

Exercice 12. Soient a, b, c et x des réels avec $a \neq 0$. Sous quelles hypothèses a-t-on $ax^2+bx+c<0$?

Correction : Notons $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.

On a $ax^2+bx+c<0$ si et seulement si l'une des quatre hypothèses suivantes est remplie :

- $\Delta < 0$ et $a<0$.
- $\Delta = 0$, $a<0$ et $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.
- $\Delta > 0$, $a<0$ et $x \in \left]-\infty, \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right[\cup \left]\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, +\infty\right[$.
- $\Delta > 0$, $a>0$ et $x \in \left]\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right[$.

Exercice 13. Simplifier $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

Correction : Posons $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=(5\sqrt{2}+7)^{1/3}-(5\sqrt{2}-7)^{1/3}$. On a

$$\begin{aligned}
x^3 &= \left[(5\sqrt{2}+7)^{1/3}\right]^3 - 3\left[(5\sqrt{2}+7)^{1/3}\right]^2\left[(5\sqrt{2}-7)^{1/3}\right] \\
&\qquad + 3\left[(5\sqrt{2}+7)^{1/3}\right]\left[(5\sqrt{2}-7)^{1/3}\right]^2 - \left[(5\sqrt{2}-7)^{1/3}\right]^3 \\
&= 5\sqrt{2}+7-3\left[(5\sqrt{2}+7)^{1/3}\right]^2\left[(5\sqrt{2}-7)^{1/3}\right]+3\left[(5\sqrt{2}+7)^{1/3}\right]\left[(5\sqrt{2}-7)^{1/3}\right]^2-5\sqrt{2}+7 \\
&= 14+3\left[(5\sqrt{2}+7)^{1/3}\right]\left[(5\sqrt{2}-7)^{1/3}\right]\left[(5\sqrt{2}-7)^{1/3}-(5\sqrt{2}+7)^{1/3}\right] \\
&= 14+3\left[(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)\right]^{1/3}(-x) \\
&= 14-3x\left[50-49\right]^{1/3} = 14-3x.
\end{aligned}$$

Ainsi $0=x^3+3x-14=(x-2)(x^2+2x+7)$. Or le discriminant du trinôme X^2+2X+7 est strictement négatif donc $x^2+2x+7 \neq 0$. Nous en déduisons que $x=2$.

Exercice 14. Déterminer $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right[$ et $\beta \in \left]-\dfrac{\pi}{5}, 0\right]$ tels que $\dfrac{19\pi}{12} \equiv \alpha \left[\dfrac{\pi}{3}\right]$ et $\dfrac{19\pi}{12} \equiv \beta \left[\dfrac{\pi}{5}\right]$.

Correction : On cherche $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right[$ et un entier k tels que $\alpha = \dfrac{19\pi}{12} - k\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{(19-4k)\pi}{12}$. Prenons $k=4$. Dans ce cas, $\alpha = \dfrac{3\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

On cherche $\beta \in \left]-\dfrac{\pi}{5}, 0\right]$ et un entier ℓ tels que $\beta = \dfrac{19\pi}{12} - \ell\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{(95-12\ell)\pi}{60}$. Prenons $\ell=8$. Dans ce cas, $\beta = -\dfrac{\pi}{60} \in \left]-\dfrac{\pi}{5}, 0\right]$.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les produits suivants :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+5}{2k+7}, \qquad \prod_{i=1}^{n} 2^{1-i^2}, \qquad \prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right), \qquad \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$

Correction : Les trois premiers ont été traités en cours. Pour le quatrième, passons au logarithme (tous les termes du produit étant strictement positifs) :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right) = \sum_{k=1}^{n} k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\big(k\ln(k+1)-k\ln(k)\big).$$

On utilise l'astuce du « +1–1 » pour se ramener à une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\Big((k+1)\ln(k+1) - \ln(k) - k\ln(k)\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\Big((k+1)\ln(k+1) - k\ln(k)\Big) - \sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)\\
&= (n+1)\ln(n+1) - 1\cdot\ln(1) - \ln\left(\prod_{k=1}^{n}(k+1)\right)\\
&= (n+1)\ln(n+1) - \ln((n+1)!),
\end{aligned}$$

où on a reconnu une somme télescopique pour passer de la deuxième à la troisième égalité. Enfin on passe à l'exponentielle :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} = \exp\big((n+1)\ln(n+1) - \ln((n+1)!)\big) = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 20.

1) Déterminer deux réels α et β tels que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{\alpha}{k+1}+\dfrac{\beta}{k+3}$. En déduire une expression de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}$, où $n\in\mathbb{N}$.
2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Correction :

1) Soient α et β des réels et $k\in\mathbb{N}^*$. Nous avons

$$\frac{\alpha}{k+1}+\frac{\beta}{k+3} = \frac{\alpha(k+3)+\beta(k+1)}{(k+1)(k+3)} = \frac{(\alpha+\beta)k+(3\alpha+\beta)}{(k+1)(k+3)}.$$

Par conséquent $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{\alpha}{k+1}+\dfrac{\beta}{k+3}$ si et seulement si $(\alpha+\beta)k+(3\alpha+\beta)=1$. Cela est valable pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ si et seulement si $\alpha+\beta=0$ et $3\alpha+\beta=1$. On trouve $\alpha=-\beta=\dfrac{1}{2}$. Par conséquent, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+3}.$$

Faisons les changements d'indice $j=k+1$ dans la première somme et $j=k+3$ dans la deuxième. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)} &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j} - \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n+3}\frac{1}{j}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j} - \frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right).
\end{aligned}$$

2) Soit α, β et γ des réels et $k \in \mathbb{N}^*$. Nous avons

$$\frac{\alpha}{k}+\frac{\beta}{k+1}+\frac{\gamma}{k+2} = \frac{\alpha(k^2+3k+2)+\beta(k^2+2k)+\gamma(k^2+k)}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)k^2+(3\alpha+2\beta+\gamma)k+2\alpha}{k(k+1)(k+2)}.$$

Cela est valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $\alpha+\beta+\gamma=0$ et $3\alpha+2\beta+\gamma=0$ et $2\alpha=1$. On trouve $\alpha=-\gamma=\dfrac{1}{2}$ et $\beta-=1$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}.$$

Faisons les changements d'indice $j=k+1$ dans la deuxième somme et $j=k+2$ dans la troisième. On obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} + \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n+2}\frac{1}{j} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=3}^{n+2}\frac{1}{j} - \sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)}.
\end{aligned}$$

Exercice 21.

1) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x^{2^k}+1) = \frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sqrt{\frac{3}{4n+3}} < \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{4k+3}\right) < \sqrt{\frac{5}{4n+5}}$.

Correction :

1) Traité en cours.

2) Notons $P(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Raisonnons par récurrence.

- *Initialisation.* On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k^2} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} > \frac{5}{6} = \frac{3\cdot 2}{2\cdot 2+1}$. Ainsi $P(2)$ est vraie.
- *Hérédité.* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geqslant 2$. On veut montrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} > \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{3n(n+1)^2+2n+1}{(2n+1)(n+1)^2}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\frac{3n(n+1)^2+2n+1}{(2n+1)(n+1)^2} \geqslant \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$$

pour conclure que $P(n+1)$ est vraie. Est-ce le cas ? On vérifie... on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{3n(n+1)^2+2n+1}{(2n+1)(n+1)^2} \geqslant \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1} \\
\iff \quad & (3n(n+1)^2+2n+1)(2n+3) \geqslant 3(n+1)(2n+1)(n+1)^2 \\
\iff \quad & (3n(n+1)^2+2n+1)(2n+3) \geqslant 3(n+1)(2n+1)(n+1)^2 \\
\iff \quad & (3n^2+6n^2+5n+1)(2n+3) \geqslant 3(2n^2+3n+1)(n^2+2n+1) \\
\iff \quad & 6n^4+21n^3+28n^2+17n+3 \geqslant 6n^4+21n^3+27n^2+15n+3 \\
\iff \quad & n^2+2n \geqslant 0
\end{aligned}$$

Cette dernière affirmation est vraie (puisque $n \geqslant 0$) donc $\dfrac{3n(n+1)^2+2n+1}{(2n+1)(n+1)^2} \geqslant \dfrac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$ et donc $P(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, nous en déduisons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

3) Notons $P(n)$: « $\sqrt{\dfrac{3}{4n+3}} < \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{4k+3}\right) < \sqrt{\dfrac{5}{4n+5}}$ » pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Raisonnons par récurrence.

- *Initialisation.* On a $\displaystyle\prod_{k=1}^{1}\left(1-\frac{2}{4k+3}\right) = 1-\frac{2}{4\cdot 1+3} = \frac{5}{7}$ et $\dfrac{3}{7} < \dfrac{25}{49} < \dfrac{5}{9}$ donc

$$\sqrt{\frac{3}{4\cdot 1+3}} = \sqrt{\frac{3}{7}} < \frac{5}{7} < \sqrt{\frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{5}{4\cdot 1+5}}.$$

Ainsi $P(1)$ est vraie.

- *Hérédité.* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc

$$\sqrt{\frac{3}{4n+3}} < \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{4k+3}\right) < \sqrt{\frac{5}{4n+5}}.$$

En multipliant par le réel strictement positif $\dfrac{4n+5}{4n+7} = 1-\dfrac{2}{4(n+1)+3}$, on obtient

$$\sqrt{\frac{3}{4n+3}}\frac{4n+5}{4n+7} < \prod_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{2}{4k+3}\right) < \sqrt{\frac{5}{4n+5}}\frac{4n+5}{4n+7}.$$

Pour que $P(n+1)$ est vraie, il suffit que

$$(1) \quad \sqrt{\frac{3}{4(n+1)+3}} \leqslant \sqrt{\frac{3}{4n+3}}\frac{4n+5}{4n+7} \qquad \text{et} \qquad (2) \quad \sqrt{\frac{5}{4n+5}}\frac{4n+5}{4n+7} \leqslant \sqrt{\frac{5}{4(n+1)+5}}$$

Est-ce le cas ? On vérifie... on a :

$$\begin{aligned}
(1) \quad \iff \quad & \sqrt{(4n+3)(4n+7)} \leqslant 4n+5 \\
\iff \quad & (4n+3)(4n+7) \leqslant (4n+5)^2 \\
\iff \quad & 16n^2+12n+28n+21 \leqslant 16n^2+40n+25 \quad \iff \quad 21 < 25,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(2) \quad \iff \quad & \sqrt{(4n+5)(4n+9)} \leqslant 4n+7 \\
\iff \quad & (4n+5)(4n+9) \leqslant (4n+7)^2 \\
\iff \quad & 16n^2+20n+36n+45 \leqslant 16n^2+56n+49 \quad \iff \quad 45 < 49.
\end{aligned}$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, nous en déduisons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 22 – Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ des réels.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$.

   Indication : on pourra étudier le trinôme du second degré $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(|x_i| + X|y_i|\big)^2$.

2) Application : montrer que $\dfrac{6n}{(n+1)(2n+1)} \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Correction :

1) Posons $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + X|y_i|)^2$. Développons :

$$P = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2X \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| + X^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

   Il s'agit d'un trinôme du second degré et son discriminant est

$$\Delta = \left(2\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

   Mais le trinôme P est toujours positif. Il ne peut pas avoir deux racines réelles distinctes. Son discriminant Δ est donc toujours négatif. Par conséquent

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) = \frac{\Delta}{4} \leqslant 0$$

   et donc

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

   Puisque la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, nous obtenons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

2) On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $x_i = \dfrac{1}{i}$ et $y_i = i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}.$$

   D'où la formule.

Exercice 25. A l'aide d'une factorisation, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10^n - 1$ est divisible par 9.

Correction : La formule du binôme de Newton entraîne que

$$10^n - 1 = (9+1)^n - 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 9^k - 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 9^k = 9 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 9^{k-1}}_{\in \mathbb{N}}$$

est bien divisible par 9.

Exercice 26. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4^n (n!)^3 < (n+1)^{3n}$.

Correction : Raisonnons par récurrence.

- *Initialisation.* On a $4^1 (1!)^3 = 4 < 8 = 2^3 = (1+1)^3$ donc la formule est vraie pour $n = 1$.
- *Hérédité.* Supposons que la formule soit vraie au rang n pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc $4^n (n!)^3 < (n+1)^{3n}$ et donc
$$\frac{4^{n+1}((n+1)!)^3}{(n+2)^{3n+3}} = \frac{4(n+1)^3\, 4^n (n!)^3}{(n+2)^{3n+3}} < \frac{4(n+1)^3\, (n+1)^{3n}}{(n+2)^{3n+3}} = 4\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n+3}$$
Pour conclure, il suffit de montrer que cette quantité est inférieure à 1. On a
$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} \leqslant 1 - \frac{1}{1+2} = \frac{2}{3}$$
donc
$$\frac{4^{n+1}((n+1)!)^3}{(n+2)^{3n+3}} \leqslant 4\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n+3} \leqslant 4\left(\frac{2}{3}\right)^{3n+3}.$$
Puisque $\frac{2}{3} \in]0,1[$ et $3n+3 \geqslant 6$, on a
$$4\left(\frac{2}{3}\right)^{3n+3} \leqslant 4\left(\frac{2}{3}\right)^{6} = 4\,\frac{64}{729} = \frac{256}{729} < 1.$$
Nous en déduisons que
$$\frac{4^{n+1}((n+1)!)^3}{(n+2)^{3n+3}} < 1$$
et donc $4^{n+1}((n+1)!)^3 < (n+2)^{3n+3}$, c'est-à-dire la formule est vraie au rang $n+1$.

D'où la formule par récurrence.

Exercice 28. Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Montrer que
$$\sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Correction : Fixons $p \in \mathbb{N}$. Montrons la formule par récurrence sur $n \geqslant p$ (à p fixé donc).

- *Initialisation :* On a $\displaystyle\sum_{i=p}^{p} \binom{i}{p} = \binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$ donc la formule est vraie au rang p.
- *Hérédité :* Supposons que la formule soit vraie au rang n pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à p. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$. On a
$$\sum_{i=p}^{n+1} \binom{i}{p} = \sum_{i=p}^{n} \binom{i}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p},$$
d'après l'hypothèse de récurrence. Or la formule du triangle de Pascal entraîne que
$$\binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$
Ainsi la formule est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \geqslant p$.

Exercice 29. Montrer de deux manières différentes que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Correction :

- *Méthode 1.* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On peut aussi utiliser la formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n = 1 + \binom{n}{1} x^1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^n = 1 + nx + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^n}_{\geqslant 0}.$$

  Ainsi $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

- *Méthode 2.* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $P(n)$: « $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ » pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Procédons par récurrence.
  - On a $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$ donc $P(1)$ est vraie.
  - Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $1 + x \geqslant 0$, on a donc

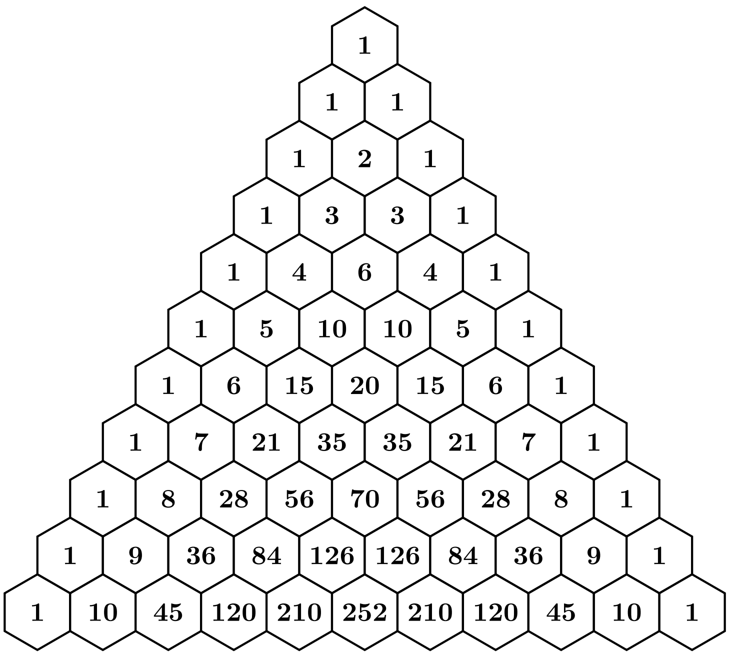
$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx) \geqslant 1 + nx + x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x.$$

    Ainsi $P(n+1)$ est vraie.
  - Par récurrence, nous en déduisons que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 30. Le triangle de Pascal est un tableau triangulaire tel que le nombre dans la case à l'intersection de la ligne $n \in \mathbb{N}$ (attention la première ligne est la ligne 0) et de la colonne $k \in [\![0, n]\!]$ est $\binom{n}{k}$. On le construit de haut en bas de façon algorithmique à l'aide de la formule de Pascal.

Construire le triangle de Pascal (sous forme pyramidale) limité à $n = 10$.

Correction : La construction du triangle de Pascal (sous forme pyramidale) consiste à placer 1 au sommet de la pyramide. Les extrémités des autres lignes sont toujours des 1, et les autres nombres sont la somme des deux nombres directement au-dessus (d'après la formule de Pascal). Le nombre dans la case à l'intersection de la ligne $n \in \mathbb{N}$ et de la colonne $p \in [\![0, n]\!]$ est $\binom{n}{p}$.



Exercice 31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i, \qquad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} j^2, \qquad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j), \qquad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i+j), \qquad \sum_{(i,j) \in A_n} (i+j)$$

où $A_n = \{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \,|\, k+\ell = n\}$.

Correction :

- Traitée en cours.
- Traitée en cours.
- D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (i+j) \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(i \sum_{j=1}^{n} 1 + \sum_{j=1}^{n} j \right) &= \sum_{i=1}^{n} \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= n \sum_{i=1}^{n} i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= n \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} n = n^2(n+1).\end{aligned}$$

- Traitée en cours.
- Nous n'avons pas vu de formule dans le cours... mais ce n'est pas difficile. On remarque que l'ensemble A_n ne contient que n couples : $(1, n-1), (2, n-2), \ldots, (n-1, 1)$. De plus, si (i,j) est l'un de ses couples, alors $i + j = n$. La somme consiste donc à sommer n fois n. Ainsi

$$\sum_{(i,j) \in A_n} (i+j) = n^2.$$

Exercice 32. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} \frac{k}{1+\ell}, \qquad \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j), \qquad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{\min(i,j)}, \qquad \sum_{1 \leqslant p,q \leqslant n} n^{p+q}, \qquad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1}{2^{|i-j|}}.$$

Correction :

- On a

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} \frac{k}{1+\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{\ell} \frac{k}{1+\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{1+\ell} \left(\sum_{k=1}^{\ell} k \right) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{1+\ell} \frac{\ell(1+\ell)}{2} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

- Traitée en cours.
- Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. On commence par décomposer selon que $i < j$, $j < i$ ou $i = j$:

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{\min(i,j)} &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2^{\min(i,j)} + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} 2^{\min(i,j)} + \sum_{i=1}^{n} 2^{\min(i,i)} \\ &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2^i + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} 2^j + \sum_{i=1}^{n} 2^i = 2 \times \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2^i + \sum_{i=1}^{n} 2^i.\end{aligned}$$

On remarque en effet qu'échanger les indices i et j dans la première somme la rend égale à la deuxième somme. Nous avons donc

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{\min(i,j)} = 2\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} 2^i\right) + \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1 = 2\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1-2^j}{1-2} - 1\right) + 2^{n+1} - 2$$

$$= 2\sum_{j=2}^{n}\left(2^j - 2\right) + 2^{n+1} - 2$$

$$= 2\sum_{j=2}^{n} 2^j - 4(n-1) + 2^{n+1} - 2.$$

On a $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} 2^j = \sum_{j=0}^{n} 2^j - 2^0 - 2^1 = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 3 = 2^{n+1} - 4$ si bien que

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{\min(i,j)} = 2^{n+2} - 8 - 4n + 4 + 2^{n+1} - 2 = (2+1)2^{n+1} - 4n - 5 = \boxed{3 \cdot 2^{n+1} - 4n - 6.}$$

- On reconnaît la formule de développement/factorisation :

$$\sum_{1 \leqslant p,q \leqslant n} n^{p+q} = \left(\sum_{p=1}^{n} n^p\right)\left(\sum_{q=1}^{n} n^q\right) = \left(\sum_{p=1}^{n} n^p\right)^2 = \left(\frac{1-n^{n+1}}{1-n} - 1\right)^2$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On commence par décomposer selon que $i < j$, $j < i$ ou $i = j$:

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1}{2^{|i-j|}} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{2^{|i-j|}} + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} \frac{1}{2^{|i-j|}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{|i-i|}} = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{2^{j-i}} + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} \frac{1}{2^{i-j}} + \sum_{i=1}^{n} 1$$

On remarque en effet qu'échanger les indices i et j dans la première somme la rend égale à la deuxième

somme. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{1}{2^{|i-j|}} = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{2^{j-i}}+\sum_{i=1}^{n}1 &= 2\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{2^{j-i}}\right)+n\\
&= 2\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\left(\sum_{i=1}^{j-1}2^{i}\right)+n\\
&= 2\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\left(\frac{1-2^{j}}{1-2}-1\right)+n\\
&= 2\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}(2^{j}-2)+n\\
&= 2\sum_{j=2}^{n}\left(1-\frac{2}{2^{j}}\right)+n\\
&= 2\sum_{j=2}^{n}1-4\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{2^{j}}+n\\
&= 2(n-1)-4\left(\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)}-1-\frac{1}{2}\right)+n\\
&= 3n-2-4\left(2-\frac{2}{2^{n+1}}-1-\frac{1}{2}\right)\\
&= 3n-2-4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n}}\right)\\
&= 3n-4+\frac{4}{2^{n}}
\end{aligned}$$

Exercice 33. Soient $x_1,\dots,x_n$ des réels. Notons $m=\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$. Montrer la formule de Huygens-König :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-m^2.$$

Correction : On pourrait développer m^2 à l'aide d'une somme double... mais il y a beaucoup plus simple en fait. En effet, par linéarité,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2mx_i+m^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{2m}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{m^2}{n}\sum_{i=1}^{n}1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{2m}{n}nm+m^2$$

et donc

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-m^2.$$
