Correction de quelques exercices de la feuille de TD 27

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et admettant une densité f qui est une fonction paire sur $\mathbb{R}$. On définit la variable aléatoire Y par

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X(\omega) \leqslant 0 \\ X(\omega) & \text{si} \quad X(\omega) > 0. \end{cases}$$

Montrer que Y n'est ni une variable aléatoire discrète, ni une variable aléatoire à densité.

Correction :

- Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $([Y > 0], [Y \leqslant 0])$ de probabilités non nulles :

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}_{[X>0]}(Y = 0)\mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}_{[X\leqslant 0]}(Y = 0)\mathbb{P}(X \leqslant 0) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

  Ainsi Y admet un atome et donc elle n'est pas une variable à densité.

- Si Y est discrète, alors $Y(\Omega)$ est au plus dénombrable et on a $\displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y) = 1$. Par contre nous avons

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(Y = 0) + \sum_{y \in Y(\Omega),\, y > 0} \mathbb{P}(X = y) = \frac{1}{2} + 0$$

  puisque X est à densité (donc $\mathbb{P}(X = y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$). C'est absurde. Ainsi Y n'est pas discrète non plus.

Exercice 5 – Loi Gamma. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi Gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$, notée $\gamma(a, \lambda)$, si elle admet pour densité la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \, x^{a-1} \, e^{-\lambda x} \, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler définie par

$$\forall y \in \,]0, +\infty[, \qquad \Gamma(y) = \int_0^{\infty} t^{y-1} e^{-t} \, dt.$$

1) Justifier qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité.
2) Qu'est ce que la loi $\gamma(1, \lambda)$?
3) Montrer que X admet une espérance et une variance. Calculer-les.
4) Montrer que $\lambda X \hookrightarrow \gamma(a, 1)$.
5) Expliciter une densité de la loi $Y = \dfrac{1}{X}$ et de la loi $\sqrt{X}$.

Correction : Cet exercice a été traité en cours sauf la deuxième partie de la question 5, concernant la loi de $Z = \sqrt{X}$. Allons-y.

Commençons par remarquer que Z est bien définie presque sûrement puisque $X \geqslant 0$ presque sûrement. Elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ si bien que $F_Z(t) = 0$ pour $t < 0$. Ensuite, donnons-nous $t \in \mathbb{R}_+$. Puisque la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leqslant t) = \mathbb{P}(X \leqslant t^2) = F_X(t^2).$$

Puisque la fonction carrée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que la fonction F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0, nous en déduisons que F_Z aussi. Par ailleurs $F_Z(0) = F_X(0) = 0$ donc la fonction F_Z est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi Z est bien une variable aléatoire à densité. En dérivant, on trouve qu'une densité de Z est

$$f_Z : t \longmapsto 2tf(t^2) = 2t\,\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\,t^{2(a-1)}\,e^{-\lambda t^2}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t^2) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\,t^{2a-1}\,e^{-\lambda t^2}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t).$$

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire dont une densité est $f : x \longmapsto \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\exp\left(-\frac{x^4}{12}\right)$. Donner la loi de $Y = X^4$.

On remarquera d'abord que f est paire puis on effectuera le changement de variable donné par la fonction $\varphi : x \longmapsto x^4$ qui est de classe C^1 sur $[\varepsilon, A]$ pour tout $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \varepsilon < A$.

Correction :

- Vérifions d'abord que f est bien une densité.
  - — La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R}$ et on a $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $\pm\infty$ (par croissances comparées). On en déduit, par comparaison de fonctions positives, que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ converge.
  - — Posons $g : x \longmapsto \exp\left(-\frac{x^4}{12}\right)$. Calculons l'intégrale de g sur $\mathbb{R}$. Déjà, puisque g est paire, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} g(x)\,dx.$$

  On se donne $\varepsilon > 0$ et $A > \varepsilon$ et on effectue le changement de variable $y = x^4$ (avec $x = \sqrt[4]{12y}$ et $dx = \frac{\sqrt[4]{12}}{4}y^{-3/4}\,dy$) :

$$\int_\varepsilon^A g(x)\,dx = \int_{\varepsilon^4/12}^{A^4/12} e^{-y}\,\frac{\sqrt[4]{12}}{4}y^{-3/4}\,dy = \frac{\sqrt[4]{12}}{4}\int_{\varepsilon^4/12}^{A^4/12} y^{1/4-1}e^{-y}\,dy.$$

  On fait tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$ et on obtient que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{\sqrt[4]{12}}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{12}{2^4}\right)^{1/4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1/4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$$

  Nous en déduisons que f est bien une densité.
- Soit $t \leqslant 0$. On a $F_Y(t) = \mathbb{P}(X^4 \leqslant t) = 0$. Supposons que $t > 0$. On a

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(|X| \leqslant t^{1/4}) = \mathbb{P}(-t^{1/4} \leqslant X \leqslant t^{1/4}) = F_X(t^{1/4}) - F_X(-t^{1/4}).$$

  Puisque $t \longmapsto t^{1/4}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit que F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. De plus $F_Y(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ donc F_Y est continue sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que Y admet une densité. En dérivant, on trouve qu'une densité de Y est

$$\begin{aligned} t \longmapsto \frac{1}{4}t^{1/4-1}(f(t^{1/4}) + f(-t^{1/4}))\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{-1/4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\,t^{1/4-1}\,e^{-t/12}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t) \\ &= \left(\frac{1}{12}\right)^{1/4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}t^{-3/4}e^{-t/12}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t). \end{aligned}$$

  Ainsi Y suit la loi $\gamma\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right)$.

Exercice 12 – Loi de Laplace. Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $b > 0$.

1) Déterminer $K > 0$ afin que $f : x \longmapsto K \exp\left(-\dfrac{|x-\mu|}{b}\right)$ soit une densité de probabilité.

Soit X une v.a. dont f est une densité. On dit alors que X suit la loi de Laplace de paramètres μ et b.

2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3) Calculer l'espérance et la variance de X, si elles existent.
4) Déterminer la loi de $Y = \dfrac{X-\mu}{b}$ et de $Z = |Y|$.

Correction : Toutes les questions ont été traitées en cours, sauf le calcul de la variance. Allons-y :
On a, d'après la formule de transfert

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\mu} x^2 f(x)\,dx + \int_{\mu}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx.$$

Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A < \mu < B$. Faisons une IPP avec les fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto b\,e^{(x-\mu)/b}$ de classe C^1 sur $[A,\mu]$:

$$\int_A^{\mu} x^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\,e^{(x-\mu)/b}\right]_A^{\mu} - \int_A^{\mu} x\,e^{(x-\mu)/b}\,dx.$$

Faisons une autre IPP avec les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto b\,e^{(x-\mu)/b}$ de classe C^1 sur $[A,\mu]$:

$$\int_A^{\mu} x\,e^{(x-\mu)/b}\,dx = \left[bx\,e^{(x-\mu)/b}\right]_A^{\mu} - \int_A^{\mu} b\,e^{(x-\mu)/b}\,dx = \left[bx\,e^{(x-\mu)/b}\right]_A^{\mu} - \left[b^2\,e^{(x-\mu)/b}\right]_A^{\mu} \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} b\mu - b^2.$$

Ainsi $\displaystyle\int_A^{\mu} x^2 f(x)\,dx \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{\mu^2}{2} - (b\mu - b^2)$, par croissances comparées. D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{\mu} x^2 f(x)\,dx = \frac{\mu^2}{2} - b\mu + b^2$.

De même on calcule que $\displaystyle\int_{\mu}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{\mu^2}{2} + b\mu + b^2$ et donc on en déduit que $\mathbb{E}(X^2) = \mu^2 + 2b^2$.

La formule de Koenig-Huygens entraîne alors que $\mathbb{V}(X) = 2b^2$.

Exercice 13 – Absence de mémoire. Soit X une variable aléatoire à densité qui vérifie la propriété d'absence de mémoire, i.e.,

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \qquad \mathbb{P}(X > x+y) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(X > y).$$

Montrer que X suit une loi exponentielle.

Correction :

- Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$\mathbb{P}(X > x+y) = 1 - F_X(x+y) = e^{-\lambda(x+y)} = e^{-\lambda x}e^{-\lambda y} = (1-F_X(x))(1-F_X(y)) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(X > y).$$

- Réciproquement, supposons que $\mathbb{P}(X > x+y) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(X > y)$ pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Notons $G : t \longmapsto \mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t)$. La méthode est classique :
  - Par récurrence, on montre que $G(nx) = G(x)^n$ pour tout $(x,n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$.
  - On en déduit que, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $G(p) = G\left(\dfrac{p}{q}\right)^q$ donc $G\left(\dfrac{p}{q}\right) = G(p)^{1/q} = G(1)^{p/q}$.
  - Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe une suite de rationnelle $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x^+. Puisque G est continue à droite sur $\mathbb{R}_+$, nous en déduisons que $G(x) = G(1)^x$.

  On prend alors $\lambda = -\ln(G(1))$. On obtient alors $G(x) = e^{-\lambda x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Ainsi X suit bien une loi exponentielle.

Exercice 16 – Moments d'une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) Montrer que X admet des moments de tout ordre. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note μ_r le moment d'ordre r de X.
2) Montrer que $\mu_{2r+1} = 0$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.
3) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\mu_{r+2} = (r+1)\mu_r$.
4) En déduire que une expression de μ_r pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Correction : **A VENIR.**

Exercice 17 – Transformée de Laplace d'une v.a. de loi normale. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Notons $\varphi_{m,\sigma}$ une densité de X.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\Lambda_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\varphi_{m,\sigma}(x)\,dx$.

On dit que Λ est la transformée de Laplace de la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

Correction : Fixons $t \in \mathbb{R}$. Pour commencer on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{tx}\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(tx - \frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right)$$

et on met ce qu'il y a dans l'exponentielle sous forme canonique (il s'agit d'un argument assez usuel) pour se ramener à des intégrales Gaussiennes :

$$\begin{aligned}
tx - \frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2 = \frac{-1}{2\sigma^2}\left(-2t\sigma^2 x + x^2 + m^2 - 2xm\right) &= \frac{-1}{2\sigma^2}\left(x^2 - 2(t\sigma^2+m)x + m^2\right) \\
&= \frac{-1}{2\sigma^2}\left(\big(x-(t\sigma^2+m)\big)^2 - (t\sigma^2+m)^2 + m^2\right) \\
&= \frac{-1}{2\sigma^2}\left(\big(x-(t\sigma^2+m)\big)^2 - t^2\sigma^4 - 2mt\sigma^2\right) \\
&= -\frac{\big(x-(t\sigma^2+m)\big)^2}{2\sigma^2} + \frac{t^2\sigma^2}{2} + mt.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$e^{tx}\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{e^{mt+t^2\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\big(x-(t\sigma^2+m)\big)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Si $t \in \mathbb{R}$, alors

$$x^2 e^{tx}\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{e^{mt+t^2\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,x^2\exp\left(-\frac{\big(x-(t\sigma^2+m)\big)^2}{2\sigma^2}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par croissances comparées. Nous en déduisons que $e^{tx}\varphi_{m,\sigma}(x) \underset{\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et donc, par comparaisons de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\varphi_{m,\sigma}(x)\,dx$ converge.

On la calcule : donnons-nous $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A < B$. On a

$$\int_A^B e^{tx}\varphi_{m,\sigma}(x)\,dx = e^{mt+t^2\sigma^2/2}\int_A^B \exp\left(-\frac{\big(x-(t\sigma^2+m)\big)^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,dx.$$

Faisons le changement de variable affine $u = x - (t\sigma^2+m)$ avec « $du = dx$ » :

$$\begin{aligned}
\int_A^B e^{tx}\varphi_{m,\sigma}(x)\,dx &= e^{mt+t^2\sigma^2/2}\int_{A-(t\sigma^2+m)}^{B-(t\sigma^2+m)} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,dx \\
&\underset{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}}{\longrightarrow} e^{mt+t^2\sigma^2/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,dx.
\end{aligned}$$

On reconnait l'intégrale d'une densité d'une v.a de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ qui vaut 1 par conséquent. Ainsi

$$\Lambda_X(t) = \exp\left(mt + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right).$$

Exercice 18. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$. Le but de cet exercice est de montrer que X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$ converge et que, dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$.

On introduit la fonction $\psi : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)\, dt$.

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^x \big(1 - F_X(t)\big)\, dt = x\big(1 - F_X(x)\big) + \psi(x)$.
2) Supposons que X admette une espérance.
   a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant x\big(1 - F_X(x)\big) \leqslant \mathbb{E}(X) - \psi(x)$.
   b) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\big(1 - F_X(x)\big)$.
   c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$ converge et que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$.
3) Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$ converge.
   a) Montrer que ψ admet une limite finie en $+\infty$.
   b) En déduire que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$.

Correction :

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Faisons une IPP avec les fonctions $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto 1 - F_X(t)$ de classe C^1 sur $[0, x]$:

$$\int_0^x (1 - F_X(t))\, dt = \Big[t(1 - F_X(t))\Big]_0^x - \int_0^x t(-F_X'(t))\, dt = x(1 - F_X(x)) + \int_0^x tf(t)\, dt,$$

   où f désigne la densité de X qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ (et qui vérifie donc $F_X' = f$).
2) Supposons que X admette une espérance.
   a) Donnons-nous $x \in \mathbb{R}_+$. On a

$$0 \leqslant x(1 - F_X(x)) = x\int_x^{+\infty} f(t)\, dt = \int_x^{+\infty} x\, f(t)\, dt \leqslant \int_x^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \mathbb{E}(X) - \psi(x)$$

   car $\mathbb{E}(X)$ existe donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ converge.
   b) Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ converge, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = \int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \mathbb{E}(X)$ et donc, par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\big(1 - F_X(x)\big) = 0$.
   c) On en déduit que $\displaystyle\int_0^x (1 - F_X(t))\, dt = x\big(1 - F_X(x)\big) + \psi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \mathbb{E}(X)$. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$ converge et vaut $\mathbb{E}(X)$.
3) Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$ converge.

a) La fonction ψ est croissante (d'après la relation de Chasles). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\psi(x) = \int_0^x \big(1 - F_X(t)\big)\, dt - x\big(1 - F_X(x)\big) \leqslant \int_0^x \big(1 - F_X(t)\big)\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt.$$

La fonction ψ est donc majorée. Le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle converge vers une limite finie en $+\infty$.

b) Le fait que ψ admette une limite finie en $+\infty$ entraîne l'existence de l'espérance de X. La question E entraîne alors que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$.