Correction de quelques exercices de la feuille de TD 25

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures).

1) Donner une base de l'ensemble $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.
2) A-t-on $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
3) Déterminer un supplémentaire de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Correction :

1) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, notons $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j) qui vaut 1.

   Une matrice de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients d'indice (i,j), $1 \leqslant i < j \leqslant n$ sont nuls. Ainsi la famille $(E_{i,j}, 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n)$ engendre $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$. De plus elle est libre en tant que sous famille de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est donc une base de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.
2) La matrice identité appartient à $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$. Ainsi $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) \neq \{O_n\}$ et donc la somme n'est pas directe.
3) Un supplémentaire de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est plutôt le sous-espace vectoriel $\mathcal{T}_n^{-*}(\mathbb{K})$ formé des matrices de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ dont les coefficients diagonaux sont nuls. En effet on a $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^{-*}(\mathbb{K}) = \{O_n\}$ (puisque seule la matrice nulle est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure avec une diagonale nulle) et il est clair que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme somme d'une matrice de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et d'une matrice de $\mathcal{T}_n^{-*}(\mathbb{K})$.

Exercice 5. Soit $(F_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de s.e.v de E. Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) = \{0\}$.

Correction :

- Supposons que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe. Soit $k \in [\![2,n]\!]$ et $x \in F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1})$. Il existe $(x_1, \ldots, x_{k-1})$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_{k-1}$. On a donc $x_1 + \cdots + x_{k-1} + (-x) = 0$ et, puisque $(-x) \in F_k$, nous obtenons que $x_1 = \cdots = x_{k-1} = -x = 0$. Ainsi $F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) = \{0\}$.
- Réciproquement supposons que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ ne soit pas directe. Il existe alors un vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ non nul dans $F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

  Notons k le plus grand entier compris entre 1 et n tel que $x_k \neq 0$ (et on a forcément $k \geqslant 2$ puisqu'au moins un des x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ est non nul). On a alors $0 = x_1 + \cdots + x_k$ et donc

  $$x_k = -(x_1 + \cdots + x_{k-1}) \in F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1})$$

  tandis que $x_k \neq 0$. Nous venons de montrer que si $F_1 + \cdots + F_n$ n'est pas directe, alors il existe $k \in [\![2,n]\!]$ tel que $F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) \neq \{0\}$. Par contraposée, si $F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) = \{0\}$ pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, alors la somme est directe.

Exercice 6. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires ?

1) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (xy,y,z) \end{array}$

2) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & 2019(x-y+z-t) \end{array}$

3) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-2P'(X) \end{array}$

4) $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$

5) $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^2-3A+2\mathrm{I}_n \end{array}$

6) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (0,x+z,z-y,0,0,x+2z) \end{array}$

7) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t,u) & \longmapsto & (1,x+y,z+t,t+u) \end{array}$

8) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ (a,b) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & a+b \\ -b & a-b & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

9) $\begin{array}{ccc} C^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 t\,f(t)\,dt \end{array}$

Correction : On note f ces applications. Sauf la dernière que l'on notera φ.

1) Traité en cours.
2) Traité en cours.
3) Soient $(P,Q)\in\mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= (\lambda P+Q)(X+1)+2(\lambda P+Q)'(X) \\ &= \lambda P(X+1)+Q(X+1)+2(\lambda P'+Q')(X) \\ &= \lambda P(X+1)+Q(X+1)+2\lambda P'(X)+2Q'(X) \\ &= \lambda(P(X+1)-2P'(X))+Q(X+1)-2Q'(X)=\lambda f(P)+f(X). \end{aligned}$$

Ainsi $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$.

4) Traité en cours.
5) Traité en cours.
6) Soient $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f\big(\lambda(x,y,z)+(x',y',z')\big) &= f\big(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z'\big) \\ &= \big(0,(\lambda x+x')+(\lambda z+z'),(\lambda z+z')-(\lambda y+y'),0,0,(\lambda x+x')+2(\lambda z+z')\big) \\ &= \big(0,\lambda(x+z)+(x'+z'),\lambda(z-y)+(z'-y'),0,0,\lambda(x+2z)+(x'+2z')\big) \\ &= \lambda(0,x+z,z-y,0,0,x+2z)+(0,x'+z',z'-y',0,0,x'+2z') \\ &= \lambda f(x,y,z)+f(x',y',z'). \end{aligned}$$

Ainsi $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^5)$.

7) Traité en cours.
8) Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda(a,b)+(c,d)) = f(\lambda a+c,\lambda b+d) &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda a+c & \lambda b+d \\ -(\lambda a+c) & 0 & (\lambda a+c)+(\lambda b+d) \\ -(\lambda b+d) & (\lambda a+c)-(\lambda b+d) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda a & \lambda b \\ -\lambda a & 0 & \lambda a+\lambda b \\ -\lambda b & \lambda a-\lambda b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ -c & 0 & c+d \\ -d & c-d & 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & a+b \\ -b & a-b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c & d \\ -c & 0 & c+d \\ -d & c-d & 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(a,b)+f(c,d) \end{aligned}$$

Ainsi $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^2,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

9) Notons φ l'application de cette question. Soient $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$, $g \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\varphi(\lambda f + g) = \int_0^1 t(\lambda f + g)(t)\, dt = \int_0^1 (\lambda t \lambda f(t) + tg(t))\, dt = \lambda \int_0^1 t\, f(t)\, dt + \int_0^1 t\, g(t)\, dt$$

donc $\varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$. Ainsi f est une forme linéaire sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 7. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de $C^\infty(\mathbb{R})$?

$$1)\ f \longmapsto f' - 2f'' + 3f, \qquad 2)\ f \longmapsto \exp \circ f \qquad 3)\ f \longmapsto (\sin \times f)' \qquad 4)\ f \longmapsto f''(2019)$$

Correction :

1) Notons $\varphi : f \longmapsto f' - 2f'' + 3f$. Pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a $f' \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $f'' \in C^\infty(\mathbb{R})$ donc $\varphi(f) = f' - 2f'' + 3f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

   Soient $(f,g) \in (C^\infty(\mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)' - 2(\lambda f + g)'' + 3(\lambda f + g)\\ &= (\lambda f' + g') - 2(\lambda f'' + g'') + 3(\lambda f + g)\\ &= \lambda(f' - 2f'' + 3f) + (g' - 2g'' + 3g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)\end{aligned}$$

   Ainsi φ est un endomorphisme de $C^\infty(\mathbb{R})$.

2) Traitée en cours

3) Traitée en cours

4) Notons $\varphi : f \longmapsto f''(2019)$. Pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a $f''(2019) \in \mathbb{R}$ qui n'est pas inclus dans $C^\infty(\mathbb{R})$. Ainsi φ n'est pas un endomorphisme (mais on peut montrer que c'est une forme linéaire).

Exercice 9. Notons $F = \{(x + y + 4z, 2x + 4z, 3x + 2y + 10z) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$.

1) Montrer qu'il existe $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $F = \operatorname{Im}(f)$. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On que F est définie sous forme paramétrée.
2) Montrer que $F = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ où e_1 et e_2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
3) Écrire F sous la forme $\operatorname{Ker}(g)$ avec $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$. On dit alors que $g(x) = 0$ est une équation de F.
4) Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, i.e. il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\operatorname{Ker}(f) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
5) L'endomorphisme f est-il surjectif ? Injectif ? Bijectif ?

Correction :

1) Soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x + y + 4z, 2x + 4z, 3x + 2y + 10z)$. Je vous laisse vérifier qu'il s'agit bien d'un endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.

   Par définition, on a $F = \operatorname{Im}(f)$. Il s'ensuit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (c'est le cas de l'image d'une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}^3$).

2) Puisque $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ engendre $\mathbb{R}^3$, on a

$$F = \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)) = \operatorname{Vect}((1,2,3),(1,0,2),(4,4,10)).$$

   Puisque $2(1,2,3) + 2(1,0,2) = (4,4,10)$, on en déduit que $F = \operatorname{Vect}((1,2,3),(1,0,2))$.

3) On a $(x,y,z) \in F$ si et seulement si il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x,y,z) = a(1,2,3) + b(1,0,2)$ si et seulement si le système $(S)\begin{cases} a + b = x \\ 2a = y \\ 3a + 2b = z \end{cases}$, d'inconnues a et b, admet une solution. On a

$$(S) \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 2a = y \\ b = x - y \\ 2b = z - 3y/2 \end{cases}$$

Ce système admet donc des solutions si et seulement si $2x - 2y = z - 3y/2$, c'est-à-dire $4x + y - 2z = 0$.

Ainsi $F = \mathrm{Ker}(g)$ où $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto 4x + y - 2z$. Je vous laisse vérifier que g est bien linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

4) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \quad &\iff \quad \begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ 2x + 4z = 0 \\ 3x + 2y + 10z = 0 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ -2y - 4z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y - 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x + y + 4z = 0 \\ -2y - 4z = 0 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x = -2z \\ y = -2z \end{cases} \\
&\iff \quad (x, y, z) = z(-2, -2, 1).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-2, -2, 1))$.

5) Puisque $\mathrm{Ker}(f) \neq \{(0, 0, 0\}$ et $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ (en effet $4 \cdot 0 + 1 - 2 \cdot 0 \neq 0$ donc $(0, 1, 0) \notin F$) donc f n'es ni injective, ni surjective.

Exercice 16. Soient E, E', F et F' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient φ un isomorphisme de E sur E' et ψ un isomorphisme de F sur F'. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E',F') \\ f & \longmapsto & \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{array}$ est bien définie et est un isomorphisme.

Correction :

- Notons T cette application. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ alors, puisque $\varphi^{-1} \in \mathscr{L}(E', E)$ et $\psi \in \mathscr{L}(F, F')$, on a $T(f) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathscr{L}(E', F')$. Ainsi T est bien définie.

- Donnons-nous f et g dans $\mathscr{L}(E, F)$ ainsi que $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$T(\lambda f + g) = \psi \circ (\lambda f + g) \circ \varphi^{-1} = \psi \circ (\lambda f \circ \varphi^{-1} + g \circ \varphi^{-1}) = \lambda \psi \circ f \circ \varphi^{-1} + \psi \circ g \circ \varphi^{-1}),$$

  où on a utilisé la linéarité de ψ à la dernière égalité. Ainsi $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$. Il s'ensuit que T est linéaire.
- Soit $f \in \mathrm{Ker}(T)$. On a $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = T(f) = 0$ et donc $f = \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = \psi^{-1} \circ 0 \circ \varphi = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ et donc T est injective.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Posons $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$. On a $T(g) = \psi \circ g \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = f$. Ainsi $f \in \mathrm{Im}(T)$. On a donc $\mathrm{Im}(T) = \mathscr{L}(E, F)$ et donc T est surjective.

Nous en déduisons que T est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathscr{L}(E', F')$.

Exercice 21. Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que le polynôme $f^2 = 5\,\mathrm{Id}_E - 4f$.

1) Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} en fonction de f.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{K}^2$ tel que $f^n = a_n f + b_n \mathrm{Id}_E$.
3) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n.
   On pourra montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Correction :

1) On a $f^2 + 4f = 5\,\mathrm{Id}_E$ donc $f \circ \left(\frac{1}{5} f + \frac{4}{5} \mathrm{Id}_E\right) = \left(\frac{1}{5} f + \frac{4}{5} \mathrm{Id}_E\right) \circ f = \mathrm{Id}_E$. Ainsi f est bijectif donc c'est un automorphisme. De plus on a $f^{-1} = \frac{1}{5} f + \frac{4}{5} \mathrm{Id}_E$.

2) Procédons par récurrence.
   - On a $f^0 = a_0 f + b_0 \operatorname{Id}_E$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. On a aussi $f^1 = a_1 f + b_1 \operatorname{Id}_E$ avec $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.
   - Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $f^n = a_n f + b_n \operatorname{Id}_E$. On a alors

   $$f^{n+1} = f \circ f^n = a_n f^2 + b_n f = a_n(5\operatorname{Id}_E - 4f) + b_n f = 5a_n \operatorname{Id}_E + (-4a_n + b_n) f = a_{n+1} f + b_{n+1} \operatorname{Id}_E$$

   avec $a_{n+1} = -4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 5a_n$.

   D'où le résultat par récurrence.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+2} = -4a_{n+1} + b_{n+1} = -4a_{n+1} + 5a_n$. L'équation caractéristique est $(r+5)(r-1) = r^2 + 4r - 5 = 0$ et elle admet -5 et 1 pour racine. Ainsi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \lambda(-5)^n + \mu 1^n = \lambda(-5)^n + \mu.$$

On a $0 = a_0 = \lambda + \mu$ et $1 = a_1 = -5\lambda + \mu$. Ainsi $\mu = -\lambda$ et $1 = -6\lambda$ donc $\mu = -\lambda = \dfrac{1}{6}$. Nous en déduisons que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \frac{1 - (-5)^n}{6}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad b_n = 5a_{n-1} = \frac{5 + (-5)^n}{6}$$

Exercice 24. Soit $p : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (2y - 3x, 4y - 6x) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^2$. Déterminer des sous-espaces vectoriels F et G tels que p est la projection sur F parallèlement à G (on en donnera des bases).

Correction : Remarquons que $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ (je vous laisse détailler ce point... c'est ultra classique et facile). Ensuite, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$p \circ p(x, y, z) = p((2y-3x, 4y-6x)) = (2(4y-6x) - 3(2y-3x), 4(4y-6x) - 6(2y-3x)) = (2y-3x, 4y-6x) = p(x, y, z).$$

Ainsi $p \circ p = p$ et donc p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

Il s'ensuit que p est la projection sur $F = \operatorname{Im}(p)$ parallèlement $G = \operatorname{Ker}(p)$.

- Puisque $((1, 0), (0, 1))$ engendre $\mathbb{R}^2$, on a

$$\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Vect}(p(1, 0), p(0, 1)) = \operatorname{Vect}((-3, -6), (2, 4)) = \operatorname{Vect}((1, 2)).$$

- Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in G \qquad &\iff \qquad p(x, y, z) = (0, 0, 0) \qquad \iff \qquad \begin{cases} 2y - 3x &= 0 \\ 4y - 6x &= 0 \end{cases} \\ &\iff \qquad 2y = 3x \\ &\iff \qquad (x, y) = \frac{x}{2}(2, 3) \end{aligned}$$

  Ainsi $G = \operatorname{Vect}((2, 3))$.

Exercice 25. Soit $p : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x+z, y+z, 0) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer des sous-espaces vectoriels F et G tels que p est la projection sur F parallèlement à G (on en donnera des bases).

Correction : Remarquons que $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ (je vous laisse détailler ce point... c'est ultra classique et facile). Ensuite, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$p \circ p(x, y, z) = p(p(x, y, z)) = \big((x + z) + 0, (y + z) + 0, 0\big) = p(x, y, z).$$

Ainsi $p \circ p = p$ et donc p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

Il s'ensuit que p est la projection sur $F = \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3} - p)$ parallèlement $G = \operatorname{Ker}(p)$.

- *Méthode utilisant le fait que $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - p)$.* Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in F \quad & \iff \quad (x,y,z) - p(x,y,z) = (0,0,0) \\
& \iff \quad \begin{cases} x - (x+z) & = 0 \\ y - (y+z) & = 0 \\ \quad z - 0 & = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad z = 0 \\
& \iff \quad (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0)
\end{aligned}$$

Ainsi $F = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ et il est immédiat que $((1,0,0),(0,1,0))$ est libre.

Méthode utilisant le fait que $F = \mathrm{Im}(p)$. Puisque $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ engendre $\mathbb{R}^2$, on a

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(p(1,0,0), p(0,1,0), p(0,0,1)) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,0,0),(1,1,0)) = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0)).$$

- Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in G \quad & \iff \quad p(x,y,z) = (0,0,0) \\
& \iff \quad \begin{cases} x + z & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad x = y = -z \\
& \iff \quad (x,y,z) = z(-1,-1,1)
\end{aligned}$$

Ainsi $G = \mathrm{Vect}((-1,-1,1))$.

Exercice 29 – Symétries et involutions. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Soient F un s.e.v de E et G un supplémentaire de F sans E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple de vecteurs $(u_x, v_x) \in F \times G$ tel que $x = u_x + v_x$. L'application $s : x \in E \longmapsto u_x - v_x$ est appelée symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G.

1) a) Montrer que $s \in \mathscr{L}(E)$.
   b) Que dire de l'endomorphisme $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$?
   c) Montrer que s est un automorphisme de E et que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
   d) Montrer que $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
2) Soit u un automorphisme de E tel que $u^{-1} = u$ (on parle d'involution de E).
   a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.
   b) Montrer que u est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.

Correction :

1) a) Pour tout $(x,y) \in E^2$, il existe $(u_x, u_y, v_x, v_y) \in F^2 \times G^2$ uniquement déterminés tels que $x = u_x + v_x$ et $y = u_y + v_y$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, nous avons $\lambda x + y = (\lambda u_x + u_y) + (\lambda v_x + v_y)$ avec $(\lambda u_x + u_y) \in F$ et $(\lambda v_x + v_y) \in G$. Par conséquent $s(\lambda x + y) = \lambda u_x + u_y - (\lambda v_x + v_y) = \lambda(u_x - v_x) + (u_y - v_y) = \lambda s(x) + s(y)$. Ainsi s est un endomorphisme de E.
   b) Soit $x \in E$. On a $p(x) = \dfrac{1}{2}(s(x) + x) = \dfrac{1}{2}(u_x - v_x + u_x + v_x) = u_x$. Ainsi p est la projection sur F parallèlement à G.
   c) Soit $x \in E$. On a $s \circ s(x) = s(u_x - v_x) = u_x - (-v_x) = u_x + v_x = x$. Ainsi $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et donc s est un automorphisme dont la réciproque est s.
   d)
   - Si $x \in F$ alors $u = u_x$ et donc $s(x) = s(u_x) = u_x = x$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$. Réciproquement, si $s(x) = x$ alors $u_x + v_x = u_x - v_x$ donc $v_x = 0$ et donc $x = u_x \in F$.
   - Si $x \in G$ alors $u = v_x$ et donc $s(x) = s(v_x) = -v_x = -x$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. Réciproquement, si $s(x) = -x$ alors $u_x + v_x = -u_x + v_x$ donc $u_x = 0$ et donc $x = v_x \in G$.

2) a) Pour tout $x \in E$, $x = y + z$ avec $y = \frac{1}{2}(x + s(x))$, $z = \frac{1}{2}(s - s(x))$ et

$$s(y) = \frac{1}{2}\left(s(x) + s \circ s(x)\right) = \frac{1}{2}(s(x) + x) = y, \qquad s(z) = \frac{1}{2}\left(s(x) - s \circ s(x)\right) = \frac{1}{2}(s(x) - x) = -z.$$

Ainsi $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. De plus si $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, alors $s(x) = x$ et $s(x) = -x$ donc $x = -x$ et donc $x = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \{0\}$. Nous en déduisons que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

b) Enfin, pour tout $x = y + z \in E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, $s(x) = s(y) + s(z) = y - z$. Nous en déduisons que s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
