Correction de quelques exercices de la feuille de TD 24

Exercice 5. On sait qu'une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes.

1) Si on considère une population de n personnes, on peut modéliser le nombre de personne mesurant plus de 1m90 par une loi de Poisson. Quel paramètre doit-on considérer pour cette loi de Poisson ?
2) Calculer la probabilité que, dans une population de 100 personnes, il y ait au moins une personne mesurant plus de 1m90.
3) Calculer la probabilité que, dans une population de 300 personnes, il y ait au moins deux personne mesurant plus de 1m90.

Correction :

1) Si on considère une population de n personnes, il y a en moyenne $\dfrac{n}{80}$ personnes mesurant plus d'1m90. On modélise donc le nombre de personne mesurant plus de 1m90 par une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre $\dfrac{n}{80}$.
2) Si $n = 100$, alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\dfrac{5}{4}\right)$. La probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1m90 est
$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - e^{-5/4} \approx 0,713.$$
3) Si $n = 300$, alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\dfrac{15}{4}\right)$. La probabilité qu'il y ait au moins deux personne mesurant plus de 1m90 est
$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - e^{-15/4} - e^{-15/4}\frac{15}{4} \approx 0,888.$$

Exercice 9 – D'après EDHEC 2005. Un joueur dispose de deux jetons J1 et J2. Le jeton J1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1. La probabilité qu'il tombe sur 1 est $p \in]0,1[$. Le jeton J2 possède deux faces numérotées 1. Le joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton. On considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{(1-p)p^{n-1}}{2}$.
2) En déduire $P(X = 0)$. Ce résultat était-il prévisible ?
3) Montrer que X admet un moment d'ordre 2. Calculer son espérance et sa variance.

Correction : cf. DM n° 16.

Exercice 17. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance. L'objectif de cet exercice est de montrer que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X = j) + (n+1)\mathbb{P}(X > n)$.
2) Justifier que $(n+1)\mathbb{P}(X > n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$.
3) Conclure.

Correction :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n} (1 - \mathbb{P}(X \leqslant k)) = n + 1 - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X \leqslant k) = n + 1 - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = j).$$

En appliquant le théorème de Fubini, nous obtenons que :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \mathbb{P}(X = j).$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = n + 1 - \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \mathbb{P}(X = j) = n + 1 - \sum_{j=0}^{n} (n - j + 1) \mathbb{P}(X = j)$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) &= n + 1 - (n+1) \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X = j) + \sum_{j=0}^{n} j \mathbb{P}(X = j) \\ &= n + 1 - (n+1) \mathbb{P}(X \leqslant n) + \sum_{j=0}^{n} j \mathbb{P}(X = j) \\ &= (n+1) \mathbb{P}(X > n) + \sum_{j=1}^{n} j \mathbb{P}(X = j) \end{aligned}$$

2) Si $k \geqslant n + 1$, alors $k\mathbb{P}(X = k) \geqslant (n+1)\mathbb{P}(X = k)$ si bien que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k) \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1) \mathbb{P}(X = k) = (n+1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = (n+1) \mathbb{P}(X > n).$$

3) Puisque X admet une espérance, on a $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (on reconnait le reste d'une série convergente). Par encadrement, nous en déduisons que $(n+1)\mathbb{P}(X > n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Finalement

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{j=1}^{n} j \mathbb{P}(X = j) + (n+1) \mathbb{P}(X > n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 + \mathbb{E}(X)$$

et donc la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(X > k)$ converge et sa somme vaut $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 18. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendants ayant la même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On note F la fonction de répartition de X_1. Posons $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $T_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

1) Exprimer les fonctions de répartition de M_n et T_n en fonction de F et de n.
2) Exprimer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{E}(T_n)$ (si elles existent) en fonction de F.
   On s'aidera d'un exercice de cette feuille.
3) Déterminer la loi de T_n lorsque X_1 suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Correction :

1) Soit $t \in \mathbb{N}$.

   - L'idée est de remarquer que $M_n \leqslant t$ si et seulement si $X_i \leqslant t$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi

   $$F_{M_n}(t) = \mathbb{P}(M_n \leqslant t) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t]\right).$$

   Puisque $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendants, on obtient :

   $$F_{M_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant t) = \prod_{i=1}^{n} F(t) = \big(F(t)\big)^n.$$

   L'avant dernière égalité découle du fait que $X_1, \ldots, X_n$ ont même loi donc même fonction de répartition.

   - L'idée est de remarquer que $T_n \geqslant t$ si et seulement si $X_i \geqslant t$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi

   $$F_{T_n}(t) = 1 - \mathbb{P}(T_n > t) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \geqslant t]\right).$$

   Puisque $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendants, on obtient :

   $$F_{T_n}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \geqslant t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \big(1 - F(t)\big) = 1 - \big(1 - F(t)\big)^n.$$

   L'avant dernière égalité découle du fait que $X_1, \ldots, X_n$ ont même loi donc même fonction de répartition.

2) Si $\mathbb{E}(M_n)$ existe, alors l'exercice 15 de cette feuille entraîne que

$$\mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(M_n > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - F_{M_n}(k)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \big(F(k)\big)^n\right)$$

et, si $\mathbb{E}(T_n)$ existe, alors

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(1 - F_{T_n}(k)\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - F(k)\big)^n\right)$$

3) Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $F(t) = 1 - (1-p)^{\lfloor t \rfloor}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (et 0 sinon). Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad F_{T_n}(t) = 1 - \big(1 - F(t)\big)^n = \begin{cases} 1 - (1-p)^{n\lfloor t \rfloor} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi $T_n \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$ avec $1 - \alpha = (1-p)^n$, c'est-à-dire $\alpha = 1 - (1-p)^n$.
