Correction de quelques exercices de la feuille de TD 23

Exercice 3. Soit $\mathcal{A}$ une tribu de $\mathbb{R}$ contenant tous les segments. Montrer qu'elle contient tous les intervalles.

Correction : Il suffit de remarquer (mais pour être complet il faudrait montrer chacune des égalités ensemblistes ci-dessous par double inclusion) que, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leqslant b$,

- $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R} \in \mathcal{A}$,
- $]-\infty,a] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n,a] \in \mathcal{A}$,
- $[a,+\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a,n] \in \mathcal{A}$,
- $]-\infty,a[= \overline{[a,+\infty[} \in \mathcal{A}$,
- $]a,+\infty[= \overline{]-\infty,a]} \in \mathcal{A}$,
- $[a,b] \in \mathcal{A}$,
- $]a,b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a+1/n, b-1/n] \in \mathcal{A}$,
- $]a,b] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a+1/n, b] \in \mathcal{A}$,
- $[a,b[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a, b-1/n] \in \mathcal{A}$.

Exercice 4. On lance une pièce de monnaie une infinité de fois et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note T_n : « obtenir Pile au $n^{\text{ième}}$ lancer ». Décrire avec des phrases les événements $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geqslant n} T_p$ et $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} T_p$.

Correction :

- On a E : « il existe un rang $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geqslant n$, on obtient Pile au $p^{\text{ième}}$ lancer » . Autrement dit E : « on obtient un nombre fini de Faces » .
- On a F : « quelque soit $n \in \mathbb{N}$, il existe un rang $p \geqslant n$ tel que l'on obtient Pile au $p^{\text{ième}}$ lancer » . Autrement dit F : « on obtient un nombre infini de Piles » .

Exercice 13. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que si $X = Y$ presque sûrement (i.e. $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$), alors X et Y ont la même loi.

Correction : Soit I un intervalle. On a

$$\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}([X \in I] \cap [X = Y]) + \mathbb{P}([X \in I] \cap [X \neq Y]) = \mathbb{P}([Y \in I] \cap [X = Y]) + \mathbb{P}([X \in I] \cap [X \neq Y]).$$

et $\mathbb{P}(Y \in I) = \mathbb{P}([Y \in I] \cap [X = Y]) + \mathbb{P}([X \in I] \cap [X \neq Y])$ donc

$$\mathbb{P}(X \in I) - \mathbb{P}(Y \in I) = \mathbb{P}([X \in I] \cap [X \neq Y]) - \mathbb{P}([Y \in I] \cap [X \neq Y])$$

On a $[X \in I] \cap [X \neq Y] \subset [X \neq Y]$ donc $\mathbb{P}([X \in I] \cap [X \neq Y]) \leqslant \mathbb{P}(X \neq Y) = 0$ donc $\mathbb{P}([X \in I] \cap [X \neq Y]) = 0$. De même $\mathbb{P}([Y \in I] \cap [X \neq Y]) = 0$. Ainsi $\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(Y \in I)$. Nous en déduisons que X et Y ont la même loi.

Exercice 14. On rappelle que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f une application continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Correction : Puisque f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $]a, b[$ avec $-\infty \leqslant a <\leqslant b \leqslant +\infty$.

- Si $a \in \mathbb{R}$ et si $x \leqslant a$, alors $[f \leqslant x] = \{\omega \in \mathbb{R} \,|\, f(\omega) \leqslant x\} = \varnothing \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- Si $b \in \mathbb{R}$ et si $x \geqslant b$, alors $[f \leqslant x] = \{\omega \in \mathbb{R} \,|\, f(\omega) \leqslant x\} = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- Si $x \in]a, b[$, alors $[f \leqslant x] = \{\omega \in \mathbb{R} \,|\, f(\omega) \leqslant x\} = \{\omega \in \mathbb{R} \,|\, \omega \leqslant f^{-1}(x)\} =]-\infty, f^{-1}(x)] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ainsi f est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.