Correction de quelques exercices de la feuille de TD 22

Exercice 1. Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes :

$$1)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2(-1)^n}{n!}, \qquad 2)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{n(n-1)7^n}{(n+1)!}, \qquad 3)\ \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1}\frac{n-1}{3^n}, \qquad 4)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+n-3}{5^{n-1}}.$$

Correction : Toutes ont été traitées sauf la dernière. Allons-y :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{n^2+n-3}{5^{n-1}} = \frac{1}{5}\frac{n(n-1)}{5^{n-2}} + 2\frac{n}{5^{n-1}} - 15\frac{1}{5^n}.$$

La série converge donc puisqu'elle est la somme de séries géométriques dérivées de raison $\frac{1}{5}\in\,]-1,1[$. De plus

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+n-3}{5^{n-1}} &= \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{5^{n-2}} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{5^{n-1}} - 15\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{5^n}\\ &= \frac{1}{5}\,\frac{2}{(1-1/5)^3} + 2\frac{1}{(1-1/5)^2} - 15\left(\frac{1}{1-1/5}-1\right)\\ &= \frac{1}{5}\,\frac{2\,5^3}{4^3} + 2\frac{5^2}{4^2} - 15\left(\frac{5}{4}-1\right) = \frac{25}{32}+\frac{25}{8}-\frac{15}{4} = \frac{5}{32}.\end{aligned}$$

Exercice 4. Étudier la convergence des séries de terme général

1) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)$,
2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3-1}}$,
3) $\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+3)}}$,
4) $\dfrac{\cos(3^n)}{4n^2-3n+6}$,
5) $\dfrac{1}{n\cos^2(n)}$,
6) $1-\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n^3}}$,
7) $\dfrac{\pi^2}{n}+1-\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$,
8) $n\ln(n)e^{-\sqrt{n}}$,
9) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,
10) $\dfrac{(-1)^n n!}{n^n}$,
11) $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$,
12) $\ln\left(1-\dfrac{1}{n+5}\right)$,
13) $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$,
14) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
15) $1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{e}}$,
16) $\dfrac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$,
17) $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^3}$,
18) $\sqrt{\tan\left(\dfrac{1}{2019+n\sqrt{n}}\right)}$

Correction : La plupart ont été traitées en cours.

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\left|\dfrac{\cos(3^n)}{4n^2-3n+6}\right| \leqslant \dfrac{1}{4n^2-3n+6}$. De plus $\dfrac{1}{4n^2-3n+6} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{4n^2-3n+6}$ et donc $\sum_{n\geqslant 1}\left|\dfrac{\cos(3^n)}{4n^2-3n+6}\right|$ converge. Nous en déduisons que $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{\cos(3^n)}{4n^2-3n+6}$ converge.

6) Puisque $\dfrac{-2}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $1-\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n^3}} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-2}{n^3}\right) = \dfrac{2}{3n^3}$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^3}$ converge donc $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{2}{3n^3}$ converge et donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 1}\left(1-\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n^3}}\right)$.

7) On a $\dfrac{\pi^2}{n}+1-\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{=} \dfrac{\pi^2}{n}+\dfrac{\pi^2}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ puisque $\dfrac{\pi}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\dfrac{\pi^2}{n}+1-\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{=}\underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3\pi^2}{2n}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge si bien que, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{\pi^2}{n}+1-\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\right)$ diverge.

9) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \exp\left(-n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$. De plus $-n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -n^2\dfrac{1}{n} = -n$.

On ne dit surtout pas que $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{-n}$ puisqu'on ne peut pas composer un équivalent à gauche. Mais cela nous met sur la voie que la série va converge.

Montrons-le rigoureusement :

$$n^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \exp\left(2\ln(n)-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-n\left(\frac{2\ln(n)}{n}-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right).$$

On a $\dfrac{2\ln(n)}{n}-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$, par croissances comparées. Ainsi $n^2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Cela signifie que $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge si bien que, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ aussi.

11) On a $\sqrt[n]{n} = \exp\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par croissances comparées. Ainsi $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge si bien que, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ diverge.

13) On a $n^{3/2}\dfrac{\ln(n)}{n^2} = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$. La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge si bien que, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ converge.

18) Puisque $\dfrac{1}{2018+n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\tan\left(\dfrac{1}{2018+n\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2018+n\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{3/2}}$. Ainsi $\sqrt{\tan\left(\dfrac{1}{2018+n\sqrt{n}}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{3/4}}$. La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^{3/4}}$ diverge si bien que, par comparaison de séries à termes posifis, $\sum\limits_{n\geqslant 1}\sqrt{\tan\left(\dfrac{1}{2018+n\sqrt{n}}\right)}$ diverge.

Exercice 5. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

On pourra déterminer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}+\dfrac{c}{n+2}$.

Correction : Pour tout $n\geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$. La série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^3}$ converge si bien que $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge.

Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2} = \frac{a(n+1)(n+2)+bn(n+2)+cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(a+b+c)n^2+(3a+2b+c)n+2a}{n(n+1)(n+2)}.$$

Si on choisit $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$ (on trouve ces quantités en résolvant un système par exemple), alors $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} + \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j},$$

à l'aide de changement de variables. On a donc

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

Exercice 7. Étudier la convergente absolue et la convergence des séries suivantes

$$1)\ \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right), \qquad 2)\ \sum_{n \geqslant 1} \sin\left(\frac{(-1)^n \pi}{3n}\right), \qquad 3)\ \sum_{n \geqslant 2} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}.$$

Indication : si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la suite des sommes partielles alors, pour montrer la convergence de ces séries, on pourra essayer de prouver que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. Ces séries sont dites alternées. L'étude générale des séries alternées (cf. exercice **??***) n'est pas au programme d'ECS mais la méthode d'étude est standard et il faut la connaitre.*

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) La suite $\left((-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}\right)_{n \geqslant 2}$ n'admet pas de limite (et elle tend même vers $+\infty$ en valeur absolue) si bien que la série $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$ diverge grossièrement.

Exercice 9. On considère la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. Notons $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles.

1) Montrer que cette série converge. Notons S sa somme.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S - S_n| \leqslant 2^{-n}$.
3) Écrire un programme en `Scilab` qui prend un réel ε en entrée et qui calcule une valeur approchée de S à ε-près.

Correction :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|2^{-n} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$. Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2^n}$ converge. Ainsi la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left|2^{-n} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right|$ converge et donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ aussi.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|S - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-k} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left|2^{-k} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{(1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = 2^{-n}.$$

3) Soit $\varepsilon > 0$. Pour obtenir une valeur approchée à ε-près de S il suffit de calculer S_n avec n tel que $2^{-n} \leqslant \varepsilon$, i.e. $-n\ln(2) \leqslant \ln(\varepsilon)$. On prend donc $n = \left\lfloor -\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$. D'où le programme :

```
eps=input('Entrez la précision :');
n=floor(-log(eps)/log(2))+1;
s=0;
for k=1:n
    s=s+2∧(-k)*sin(%pi/2∧k));
end
disp('Une valeur approchée de S à '+string(eps)+'-près est'+string(s)+'.')
```

Exercice 10 – Constante d'Euler. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et posons $v_n = H_n - \ln(n)$.

1) Quelle est la nature de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2) En étudiant la série $\sum_{n\geqslant 1}(v_{n+1} - v_n)$, montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel que l'on note γ (et que l'on appelle constant d'Euler).
3) Montrer que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Correction :

1) Elle diverge puisqu'il s'agit de la suite des sommes partielles d'une série de Riemann divergente.
2) On a

$$v_{n+1} - v_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\underset{+\infty}{=} \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc

$$n^2(v_{n+1} - v_n) \underset{+\infty}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{2} + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}.$$

Ainsi $v_{n+1} - v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2n^2}$. Puisque la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3}{2n^2}$ aussi. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1}(v_{n+1} - v_n)$ converge donc.

Il s'agit d'une série télescopique convergente. Ainsi la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Notons γ sa limite.

3) Par définition on a, $v_n \underset{+\infty}{=} \gamma + o(1)$ et donc $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Exercice 14. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ convergente. Que peut-on dire sur la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)$?

Correction : Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ et donc

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \left(\prod_{k=0}^{n_0-1} a_k\right) \times \left(\prod_{k=n_0}^{n-1} a_k\right) \times a_n \leqslant M a_n \qquad \text{avec} \qquad M = \prod_{k=n_0}^{n-1} a_k.$$

Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} M\, a_n$ aussi et donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)$ converge.

Exercice 15 – Critère de Cauchy. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \in [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$.

1) a) Montrer que, si $\lambda < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   b) Montrer que, si $\lambda > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

   c) Montrer que, si $\lambda = 1$, alors on ne peut pas conclure en général.

2) Montrer que, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$. La réciproque est-elle vraie ? Quel est le critère le plus « puissant » entre celui de Cauchy et celui de D'Alembert.

Correction :

1) a) Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \in [0,1[$. On a $\lambda < \dfrac{\lambda+1}{2}$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 < \sqrt[n]{u_n} \leqslant \dfrac{\lambda+1}{2}$ et donc $\left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)^n$. Puisque $\dfrac{\lambda+1}{2} \in]0,1[$, la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant n_0} \left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)^n$ converge et donc $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ converge, par comparaison de séries à termes positifs.

   b) Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \in]1,+\infty[$. On a $\dfrac{\lambda+1}{2} < \lambda$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \geqslant \dfrac{\lambda+1}{2}$ et donc $u_n \geqslant \left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right)^n$. Puisque $\dfrac{\lambda+1}{2} \in]1,+\infty[$, la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ diverge et donc $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ diverge grossièrement.

   c) • Si $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt[n]{u_n} = e^{-2\ln(n)/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ (par croissances comparées) et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

   • Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt[n]{u_n} = e^{-\ln(n)/n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ (par croissances comparées) et $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

   Ainsi on ne peut pas conclure en général.

2) **A VENIR**. Cette question est assez technique et pourra être omise en première lecture.