Correction de quelques exercices de la feuille de TD 21

Exercice 1. En utilisant l'exercice 4 de la feuille d'exercice n° 20, montrer que

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8).$$

Correction : La fonction $\tan$ est de classe C^∞ sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \dfrac{\tan^{(n)}(x)}{n!}$. On a vu en exercice (cf. feuille de TD n° 20 ou DM n° 12) que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

On a $a_0 = 0$, $a_1 = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$. Ensuite

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_0a_1 + a_1a_0) = 0, \qquad a_3 = \frac{1}{3}(a_0a_2 + a_1^2 + a_2a_0) = \frac{1}{3}, \qquad a_4 = \frac{1}{4}(a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0) = 0$$

$$a_5 = \frac{1}{5}(a_0a_4 + a_1a_3 + a_2^2 + a_3a_1 + a_4a_0) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{15},$$

$$a_6 = \frac{1}{6}(a_0a_5 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_3a_2 + a_4a_1 + a_5a_0) = 0,$$

$$a_7 = \frac{1}{7}(a_0a_6 + a_1a_5 + a_2a_4 + a_3^2 + a_4a_2 + a_5a_1 + a_6a_0) = \frac{1}{7}\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{9} + \frac{2}{15}\right) = \frac{17}{315}.$$

D'où le résultat d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 7.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Soit f une fonction paire sur $]-a, a[$ admettant un $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$: $f(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k + o(x^{2n+1})$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_{2k+1} = 0$.
2) Soit f une fonction impaire sur $]-a, a[$ admettant un $\mathrm{DL}_{2n}(0)$: $f(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k x^k + o(x^{2n})$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_{2k} = 0$.

Correction :

1) Au voisinage de 0, on a

$$f(x) = f(-x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k(-x)^k + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k(-1)^k x^k + o(x^{2n+1}).$$

Par unicité du $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de f on a donc $a_k = a_k(-1)^k$ pour tout $k \in [\![0, 2n+1]\!]$. Pour les entiers k impairs de $k \in [\![0, 2n+1]\!]$, on a alors $a_k = -a_k$ et donc $a_k = 0$.

2) Au voisinage de 0, on a

$$f(x) = -f(-x) \underset{0}{=} -\sum_{k=0}^{2n} a_k(-x)^k + o(x^{2n}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n} a_k(-1)^{k+1} x^k + o(x^{2n}).$$

Par unicité du $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de f on a donc $a_k = a_k(-1)^{k+1}$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$. Pour les entiers k pairs de $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a alors $a_k = -a_k$ et donc $a_k = 0$.

Exercice 4. Déterminer le développement limité en 0 des fonctions suivantes à tout ordre :

$$1)\ x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad 2)\ x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2x}, \quad 3)\ x \longmapsto (1-x)\sin(x), \quad 4)\ x \longmapsto x\cos(x) - \sin(x).$$

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{et} \qquad x\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+2}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+3}).$$

Ainsi

$$(1-x)\sin(x) = \sin(x) - x\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1} - x^{2j+2}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{et} \qquad x\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j)!} + o(x^{2n+2}).$$

Ainsi

$$x\cos(x) - \sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^j \left(\frac{1}{(2j)!} - \frac{1}{(2j+1)!}\right) x^{2j+1} + o(x^{2n+2}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^j \frac{2jx^j}{(2j+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

Exercice 5. (★ à ★★) Déterminer les développements limités en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué. On montrera que ces fonctions sont dérivables en 0 et on précisera leur dérivée en 0.

1) $x \longmapsto \sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[6]{1+4x}$ à l'ordre 3,
2) $x \longmapsto \sin(x)\cos(x)$ à l'ordre 6,
3) $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)$ à l'ordre 5,
4) $x \longmapsto x\, e^{x^2} \sin(x)$ à l'ordre 4,
5) $x \longmapsto (1+x^2)\cos(x)$ à l'ordre 6,
6) $x \longmapsto \ln(1-x^2) - 2\cos(x)$ à l'ordre 4,
7) $x \longmapsto \cos(x)\sqrt[5]{1+x}$ à l'ordre 3,
8) $x \longmapsto \dfrac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 4,
9) $x \longmapsto \dfrac{2}{1-x+x^3}$ à l'ordre 5,
10) $x \longmapsto e^{(1-x)^2}$ à l'ordre 3,
11) $x \longmapsto \ln(1+x-x^3)$ à l'ordre 4,
12) $x \longmapsto \cos(x-x^2)$ à l'ordre 5,
13) $x \longmapsto \sin(x)\operatorname{Arctan}(x)$ à l'ordre 5,
14) $x \longmapsto \dfrac{\cos^2(x)}{1+3x+x^2}$ à l'ordre 5,
15) $x \longmapsto (\ln(1-x))^3$ à l'ordre 6,
16) $x \longmapsto \sin^6(x)$ à l'ordre 9,
17) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x-x^3)}{\sqrt{1-x+2x^2}}$ à l'ordre 4,
18) $x \longmapsto e^{-1/x^4}$ à l'ordre 2019.

Correction : A chaque question, notons f la fonction dont on cherche le DL.

1) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} \dfrac{2x^2}{3} - \dfrac{20x^3}{9} + o(x^3)$.
2) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^6)$.
3) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} -x + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$.

4) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} x^2 + \frac{5x^4}{6} + o(x^6)$.

5) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{11x^4}{24} + \frac{29x^6}{720} + o(x^6)$.

6) On trouve $f(x) \underset{0}{=} -2 - \frac{7x^4}{12} + o(x^4)$.

7) On trouve :$f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{5} - \frac{29x^2}{50} - \frac{13x^3}{250} + o(x^3)$.

8) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$,

9) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 2 + 2x + 2x^2 - 2x^4 - 4x^5 + o(x^5)$.

10) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} -2ex + 3ex^2 - \frac{10e}{3}x^3 + o(x^3)$.

11) On trouve $f(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^4}{4} + o(x^4)$.

12) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{11x^4}{24} - \frac{x^5}{6} + o(x^5)$.

13) On trouve $f(x) \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)$.

14) On trouve $f(x) \underset{0}{=} 1 - 3x + 7x^2 - 18x^3 + \frac{142x^4}{3} - 124x^5 + o(x^5)$.

15) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} -x^3 - \frac{3x^4}{2} - \frac{7x^5}{4} - \frac{15x^6}{8} + o(x^6)$.

16) Détaillons : puisque le premier terme du développement limité de $\sin(x)$ est x, il suffit d'aller à l'ordre 3 dans celui de $x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$. On a $\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)$ donc

$$\sin^6(x) = x^6\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^6 \underset{0}{=} x^6\left(\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^6 + o(x^3)\right) \underset{0}{=} x^6\left(\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\left(\frac{x^2}{6}\right)^k + o(x^3)\right)$$

d'après la formule du binôme de Newton. Ainsi

$$f(x) \underset{0}{=} x^6(1 - x^2 + o(x^3)) \underset{0}{=} x^6 - x^8 + o(x^9).$$

17) Détaillons : On a $x - x^3 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\begin{aligned}\ln(1 + x - x^3) &\underset{0}{=} (x - x^3) - \frac{(x-x^3)^2}{2} + \frac{(x-x^3)^3}{3} - \frac{(x-x^3)^4}{4} + o(x^4)\\ &\underset{0}{=} x - x^3 - \frac{x^2 - 2x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4).\end{aligned}$$

On a $-x + 2x^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x00$ donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1 - x + 2x^2}} = (1 - x + 2x^2)^{1/2} &\underset{0}{=} 1 - \frac{-x+2x^2}{2} + \frac{3(-x+2x^2)^2}{8} - \frac{5(-x+2x^2)^3}{16} + \frac{35(-x+2x^2)^4}{128} + o(x^4)\\ &\underset{0}{=} 1 - \frac{-x+2x^2}{2} + \frac{3x^2 - 12x^3}{8} - \frac{-5x^3}{16} - \frac{35x^4}{128} + o(x^3)\\ &\underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{8} - \frac{19x^3}{16} - \frac{13x^4}{128} + o(x^4).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{\ln(1 + x - x^2)}{\sqrt{1 - x + 2x^2}} &= (x - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4})(1 + \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{8} - \frac{19x^3}{16} - \frac{13x^4}{128}) + o(x^3)\\ &= x - \frac{37x^3}{24} - \frac{11x^4}{24} + o(x^4)\end{aligned}$$

18) Traité en cours : $f(x) \underset{0}{=} o(x^{2018})$.

Exercice 7. Déterminer les développements limités suivantes :

1) $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ en 1 à l'ordre 3,
2) $x \longmapsto \ln(2+x)$ en -1 à l'ordre 5,
3) $x \longmapsto \cos(2x)$ en $\dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre 6,
4) $x \longmapsto 3-\sqrt{5-2x}-x$ en 2 à l'ordre 3.

Correction :

1) Traité en cours.
2) On a $\ln(2+(-1+h)) = \ln(1+h) \underset{h\to 0}{=} h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} - \dfrac{h^4}{4} + \dfrac{h^5}{5} + o(h^5)$. Ainsi
$$\ln(2+x) = \underset{x\to -1}{=} (x+1) - \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(x+1)^3}{3} - \frac{(x+1)^4}{4} + \frac{(x+1)^5}{5} + o((x+1)^5).$$
3) On a $\cos\left(2\left(h+\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(2h+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(2h) \underset{h\to 0}{=} -2h + \dfrac{8h^3}{6} - \dfrac{32h^5}{120} + o(h^6)$. Ainsi
$$\cos(2x) \underset{x\to\pi/4}{=} -2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{4}{15}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^6\right))$$
4) On a
$$\begin{aligned} 3-\sqrt{5-2(h+2)}-(h+2) = 1-h-\sqrt{1-2h} &\underset{h\to 0}{=} 1-h-\left(1+\frac{-2h}{2}-\frac{(2h)^2}{8}+\frac{(2h)^3}{16}+o(h^3)\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{2}+o(h^3). \end{aligned}$$
Ainsi
$$3-\sqrt{5-2x}-x \underset{x\to 2}{=} \frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(x-2)^3}{2} + o((x-2)^3).$$

Exercice 9. Déterminer des équivalents simples des suites de terme général :

1) $e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$,
2) $\sqrt{n(1+4n)} - 2n - \dfrac{1}{4}$,
3) $-2+(2n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$,
4) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$,
5) $3n - 2n\cos\left(n^{-3/2}\right) - \sqrt[3]{3+n^3}$,
6) $\dfrac{1}{n} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n\ln(n)}$.

Correction :

1) Traité en cours.
2) Traité en cours.
3) Attention il y a à la fois du n et du $\dfrac{1}{n}$. Il faut donc penser au préalable qu'il va falloir à aller à l'ordre $k+1$ dans le développement du logarithme si on veut de l'ordre k à la fin. Allons tout de suite à l'ordre 3 (pour avoir un ordre 2) :
$$\begin{aligned} -2+(2n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\underset{+\infty}{=} -2+(2n+1)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} -2+2-\frac{1}{n}+\frac{2}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\cancel{\frac{1}{3n^3}}+o\left(\cancel{\frac{1}{n^3}}\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$
D'où $-2+(2n+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6n^2}$.

4) On a

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \sin\left(\pi n + u_n\right) = \sin(\pi n)\cos(u_n)+\cos(\pi n)\sin(u_n) = 0+(-1)^n\sin(u_n).$$

où $u_n = \pi n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right) \underset{+\infty}{=} \pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right) \underset{+\infty}{=} \frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$. Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et on a

$$\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n\sin(u_n) \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n\frac{\pi}{2n}$$

5) Traité en cours.

6) Celui-ci est plus difficile. L'idée est de mettre $\frac{1}{n}$ en facteur pour se ramener un terme du type $1-e^{u_n}$. On a, pour n assez grand :

$$\frac{1}{n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n\ln(n)} = \frac{1}{n}-\exp\left(-n\ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(1-e^{u_n}\right),$$

avec $u_n = -n\ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln(n)$. Cherchons alors un développement asymptotique de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. On a

$$\begin{aligned} u_n = \ln(n)\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right) &\underset{+\infty}{=} \ln(n)\left(-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+1\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \ln(n)\left(-1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}. \end{aligned}$$

Par croissances comparées, on a alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$\frac{1}{n}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n\ln(n)} = \frac{1}{n}\left(1-e^{u_n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{u_n}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^2}.$$

Exercice 10. Déterminer les limites en 0 (si elles existent) des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \frac{1}{x}-\frac{e^x}{\ln(1+x)}$,
2) $x \longmapsto \frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1}{1-\cos(x)}$,
3) $x \longmapsto \frac{\sqrt[5]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}}{\tan(x)}$
4) $x \longmapsto \frac{e^{\sin(x)}-e^{\tan(x)}}{\sin(x)-x}$

Correction :

1) Traité en cours.
2) Traité en cours.
3) On a

$$\sqrt[5]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x} = (1+2x)^{1/5}-(1-3x)^{1/7} \underset{0}{=} 1+\frac{2x}{5}+o(x)-\left(1+\frac{-3x}{7}+o(x)\right) \underset{0}{=} \frac{29x}{35}+o(x).$$

Ainsi $\frac{\sqrt[5]{1+2x}-\sqrt[7]{1-3x}}{\tan(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{29x/35}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{29}{35}$.

4) Traité en cours.

Exercice 11. Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage de 0. Déterminer

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(5x)-3f(4x)+7f(x)-5f(0)}{x^2}.$$

Correction : Étant donné le terme x^2 au dénominateur, on est poussé à déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ du numérateur. Puisque f est de classe C^2, la formule de Taylor-Young entraîne que

$$f(h) \underset{t\to 0}{=} f(0) + hf'(0) + f''(0)\frac{h^2}{2} + \left(h^2\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&f(5x) - 3f(4x) + 7f(x) - 5f(0) \\
&\quad \underset{x\to 0}{=} \left(f(0) + 5xf'(0) + f''(0)\frac{(5x)^2}{2} + \left(x^2\right)\right) - 3\left(f(0) + 4xf'(0) + f''(0)\frac{(4x)^2}{2} + \left(x^2\right)\right) \\
&\qquad\qquad + 7\left(f(0) + xf'(0) + f''(0)\frac{x^2}{2} + \left(x^2\right)\right) - 5f(0) \\
&\quad = 15f''(0)x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(5x) - 3f(4x) + 7f(x) - 5f(0)}{x^2} = 15f''(0)$.

Exercice 12. Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \tan^4(x) + x^2 - e^{x^2}}{\sqrt[5]{1 + x + x^2} - 1 + e^{-1/x}} \sqrt{\frac{2x^2 - 3x^3}{x^9 + 8x^2}}$,

2) $\displaystyle\lim_{n\to +\infty} n^4 \left(2\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \ln(n+1) - \ln(n-1) + 2\ln(n) - 2e^{1/n^4}\right)$,

3) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(x\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$, 4) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x^{2+1/x^3} - x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, 5) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2-x} - 1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

Correction :

1) Traité en cours.

2) Puisque $\displaystyle\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$-\ln(n+1) - \ln(n-1) + 2\ln(n) = -\ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&n^4\left(2\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \ln(n+1) - \ln(n-1) + 2\ln(n) - 2e^{1/n^4}\right) \\
&\quad \underset{+\infty}{=} n^4\left(2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{12n^4} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} - 2 - \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\
&\quad \underset{+\infty}{=} n^4\left(\frac{1}{12n^4} + \frac{1}{2n^4} - \frac{2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{17}{24}
\end{aligned}$$

3) On a

$$\ln\left(\left(x\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}\right) = x^2\ln\left(x\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x^2\ln\left(1 + u(x)\right)$$

avec $\displaystyle u(x) = x\tan\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \underset{+\infty}{=} x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ainsi $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$\ln\left(\left(x\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} x^2 u(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2\frac{1}{3x^2} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

Par continuité de $\exp$ en $1/3$, on obtient $\displaystyle\left(x\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$.

4) On a
$$x^{2+1/x^3}-x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)=x^2\left(x^{1/x^3}-x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x^2\left(e^{\ln(x)/x^3}-x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$
Étant donné le x^2 en facteur, pour obtenir une limite finie, on cherche un développement asymptotique à l'ordre 2 en $+\infty$ de l'autre terme en facteur. On a
$$x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{=}x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\underset{+\infty}{=}1-\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
De plus, par croissances comparées, $\dfrac{\ln(x)}{x^3}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Ainsi $e^{\ln(x)/x^3}\underset{+\infty}{=}1+\dfrac{\ln(x)}{x^3}+o\left(\dfrac{\ln(x)}{x^3}\right)\underset{+\infty}{=}1+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
Nous en déduisons que
$$2+x^{1/x^3}-x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\underset{+\infty}{=}x^3\left(1+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-1+\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\underset{+\infty}{=}\frac{1}{6}+o(1).$$
Cela signifie que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^{2+1/x^3}-x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{6}$.

5) On a $e^{x^2-x}-1=e^{x(x-1)}-1\underset{1}{\sim}x(x-1)$ puisque $x(x-1)\underset{x\to1}{\longrightarrow}0$. Ainsi $e^{x^2-x}-1\underset{1}{\sim}x-1$.
Ensuite $\cos\left(\dfrac{\pi(1+h)}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi h}{2}\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi h}{2}\right)\underset{h\to0}{\sim}-\dfrac{\pi h}{2}$. Ainsi $\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\underset{x\to1}{\sim}-\dfrac{\pi(x-1)}{2}$.
Nous en déduisons que
$$\frac{e^{x^2-x}-1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\underset{x\to1}{\sim}\frac{x-1}{-\frac{\pi(x-1)}{2}}\underset{x\to1}{\sim}-\frac{2}{\pi}.$$
Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{e^{x^2-x}-1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=-\frac{2}{\pi}$.

Exercice 13. A l'aide de développements limités, montrer que la fonction $x\longmapsto\dfrac{e^{-x}}{\sin(2x)}-\dfrac{\cos(x)}{2x}$ sur $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0.

Correction :

- Les fonctions $x\longmapsto\sin(2x)$, $\cos$, $x\longmapsto e^{-x}$ et $x\longmapsto\dfrac{1}{2x}$ sont dérivables sur $I\backslash\{0\}$. Il s'ensuit que f est dérivable sur $I\backslash\{0\}$ comme somme et produits de fonctions qui le sont.
- Maintenons regardons le comportement de f au voisinage de 0. On a
$$\frac{e^{-x}}{\sin(2x)}-\frac{\cos(x)}{2x}=\frac{2xe^{-x}-\sin(2x)\cos(x)}{2x\sin(2x)}\underset{0}{\sim}\frac{2xe^{-x}-\sin(2x)\cos(x)}{4x^2}.$$
Pour montrer que f est prolongeable par continuité en 0 il faut et il suffit de montrer que f admet un $\mathrm{DL}_0(0)$. Étant donné le x^2 dénominateur, il s'agit donc de trouver un $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction du numérateur. On a
  - $2xe^{-x}\underset{0}{=}2x\left(1-x+o(x)\right)\underset{0}{=}2x-2x^2+o(x^2)$,
  - $\cos(x)\sin(2x)\underset{0}{=}\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(2x+o(x^2)\right)\underset{0}{=}2x+o(x^2)$,

  donc $2xe^{-x}-\sin(2x)\cos(x)\underset{0}{=}-2x^2+o(x^2)\underset{0}{\sim}-2x^2$. Par conséquent $\dfrac{e^{-x}}{\sin(2x)}-\dfrac{\cos(x)}{2x}\underset{0}{\sim}\dfrac{-2x^2}{4x^2}\underset{0}{\sim}-\dfrac{1}{2}$.
  Nous en déduisons que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=-\dfrac{1}{2}$.

- Pour montrer que f, ainsi prolongée, est dérivable en 0, cherchons à établir que $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ admet une limite en 0. On a
$$f(x)-f(0) = \frac{2xe^{-x} - \sin(2x)\cos(x) + x\sin(2x)}{2x\sin(2x)} \underset{0}{\sim} \frac{2xe^{-x} - \sin(2x)\cos(x) + x\sin(2x)}{4x^2}.$$
On a ensuite
  — $2xe^{-x} \underset{0}{=} 2x\left(1 - x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \underset{0}{=} 2x - 2x^2 + x^3 + o(x^3)$,
  — $(x-\cos(x))\sin(2x) \underset{0}{=} \left(-1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(2x - \dfrac{(2x)^3}{6} + o(x^3)\right) \underset{0}{=} -2x + 2x^2 + \dfrac{7x^3}{3} + o(x^3)$,

  donc $2xe^{-x} + (x-\cos(x))\sin(2x) \underset{0}{=} 2x - 2x^2 + x^3 + o(x^3) - 2x + 2x^2 + \dfrac{7x^3}{3} + o(x^3) \underset{0}{=} \dfrac{10x^3}{3} + o(x^3) \underset{0}{\sim} \dfrac{10x^3}{3}$.
  Nous en déduisons que
$$f(x)-f(0) \underset{0}{\sim} \frac{10x^3/3}{4x^2} \underset{0}{\sim} \frac{5x}{6}.$$
Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{5}{6}$. Nous en déduisons que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{5}{6}$.

Exercice 17. Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation. On précisera également la position de la courbe par rapport à l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

1) $x \longmapsto (2x-1)e^{-3/x}$,
2) $x \longmapsto \sqrt[3]{8x^3 + 7x^2 - 3x + 1}$,
3) $x \longmapsto \sqrt{x^4 + 2x + 5} - x^2 e^{1/x}$,
4) $x \longmapsto (x^2+2)\ln\left(1 - \dfrac{3}{x}\right)$,
5) $x \longmapsto \dfrac{x^5(1-e^{-1/x})}{(1+x)^3}$.

Correction : Le but ici est de trouver $(a,b,p,a_p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^*$ tel que $f(x) = \underset{+\infty}{=} ax + b + \dfrac{a_p}{x^p} + o\left(\dfrac{1}{x^p}\right)$.

1) *Avant de commencer on réfléchit un peu : au minimum $p = 1$. Pour obtenir tous les termes en $\dfrac{1}{x}$ il faut au moins aller à l'ordre 2 dans le développement asymptotique de $x \mapsto e^{-3/x}$. En effet les termes en $\dfrac{1}{x^2}$ vont devenir des termes en $\dfrac{1}{x}$ quand on va les multiplier par $2x$ en développant. Ce serait une faute grave de les oublier !*

   On a $e^{-3/x} \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-3}{x}\right)^2 + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{+\infty}{=} 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{2x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi
$$\begin{aligned} f(x) = (2x-1)e^{-3/x} &\underset{+\infty}{=} (2x-1)\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{+\infty}{=} 2x - 6 + \frac{9}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 + \frac{3}{x} - \cancel{\frac{9}{2x^2}} + o\left(\cancel{\frac{1}{x^2}}\right) \\ &\underset{+\infty}{=} 2x - 7 + \frac{12}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$
   Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 2x - 7$ pour asymptote en $+\infty$. De plus la courbe est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

2) Traité en cours : $f(x) \underset{+\infty}{=} 2x + \dfrac{7}{12} - \dfrac{121}{288x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = 2x + \dfrac{7}{2}$ pour asymptote en $+\infty$. De plus la courbe est en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

3) *Avant de commencer on réfléchit un peu : déjà il faut faire apparaitre des termes en* $\dfrac{1}{x}$ *dans la racine pour se ramener à des* DL *usuels en* 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(x) = \sqrt{x^4+2x+5} - x^2 e^{1/x} = \sqrt{x^4\left(1+\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^4}\right)} - x^2 e^{1/x} = x^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^4}} - e^{1/x}\right) = x^2 g\left(\frac{1}{x}\right),$$

avec $g : u \longmapsto \sqrt{1+u^3+5u^4} - e^u$.

Étant donné le x^2 *en facteur, pour avoir au moins l'ordre* 1*, il faut pousser le développement asymptotique de* $x \mapsto g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *(et donc le* DL *de* g *en* 0*) à l'ordre* 3.

On a

$$g(u) \underset{u\to 0^+}{=} \left(1+\frac{1}{2}(2u^3+5u^4)+o(u^3)\right) - \left(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3)\right) \underset{u\to 0^+}{=} -u-\frac{u^2}{2}+\frac{5u^3}{6}+o(u^3).$$

Ainsi

$$f(x) = x^2 g\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x^2\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{5}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} -x-\frac{1}{2}+\frac{5}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = -x - \dfrac{1}{2}$ pour asymptote en $+\infty$. De plus la courbe est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

4) Traité en cours : $f(x) \underset{+\infty}{=} -3x + \dfrac{9}{2} - \dfrac{15}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = -3x + \dfrac{9}{2}$ pour asymptote en $+\infty$. De plus la courbe est en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

5) *Avant de commencer on réfléchit un peu : déjà il faut faire apparaitre des termes en* $\dfrac{1}{x}$ *dans le quotient pour se ramener à un* DL *usuel en* 0.

On a

$$\frac{x^5(1-e^{-1/x})}{(1+x)^3} = \frac{x^5(1-e^{-1/x})}{x^3\left(\frac{1}{x}+1\right)^3} = x^2(1-e^{-1/x})\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-3} = x^2 g\left(\frac{1}{x}\right),$$

avec $g : u \longmapsto (1-e^{-u})(1+u)^{-3}$.

Étant donné le x^2 *en facteur, pour avoir au moins l'ordre* 1*, il faut pousser le développement asymptotique de* $x \mapsto g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *(et donc le* DL *de* g *en* 0*) à l'ordre* 3.

On a

$$\begin{aligned}
g(u) &\underset{u\to 0^+}{=} \left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3)\right)\left(1-3u+(-3)(-4)\frac{u^2}{2}+(-3)(-4)(-5)\frac{u^3}{6}+o(u^3)\right) \\
&\underset{u\to 0^+}{=} \left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3)\right)\left(1-3u+6u^2-10u^3+o(u^3)\right) \\
&\underset{u\to 0^+}{=} u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}-3u^2+\frac{3u^3}{2}+6u^3+o(u^3) \\
&\underset{u\to 0^+}{=} u-\frac{7u^2}{2}+\frac{23u^3}{3}+o(u^3).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x) = x^2 g\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{7}{2x^2}+\frac{23}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x-\frac{7}{2}+\frac{23}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Nous en déduisons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = x - \dfrac{7}{2}$ pour asymptote en $+\infty$. De plus la courbe est au dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 19.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $x_n + \sqrt[3]{x_n} = n$.
2) Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x_n - n$. Montrer que $y_n \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt[3]{n}$.

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $z_n = y_n + \sqrt[3]{n}$. Déterminer un équivalent de z_n lorsque n tend vers $+\infty$.

   c) En déduire un développement asymptotique à trois termes de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction :

1) Le fonction $f : x \longmapsto x + \sqrt[3]{x}$ est continue est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (comme somme de deux fonctions qui le sont). On a $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Le théorème de la bijection entraîne donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui même. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$, tel que $n = f(x_n)$.
2) On a $x_n = f^{-1}(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, pour n assez grand, $x_n > 0$ et

$$\frac{n}{x_n} = 1 + \frac{\sqrt[3]{x_n}}{x_n} = 1 + \frac{1}{x_n^{2/3}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   Par conséquent $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n = y_n + n$ donc $y_n + \sqrt[3]{y_n + n} = 0$ et donc, en divisant par $\sqrt[3]{n}$ pour $n \geqslant 1$, on obtient

$$\frac{y_n}{\sqrt[3]{n}} = -\sqrt[3]{1 + \frac{y_n}{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -1$$

   car $\dfrac{y_n}{n} = \dfrac{x_n}{n} - 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $y_n \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt[3]{n}$.

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$z_n = y_n + \sqrt[3]{n} = x_n - n + \sqrt[3]{n} = -\sqrt[3]{x_n} + \sqrt[3]{n} = -\sqrt[3]{n + y_n} + \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n}\left(1 - \sqrt[3]{1 + \frac{y_n}{n}}\right).$$

   Or $\dfrac{y_n}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^{2/3}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc

$$z_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}\left(-\frac{1}{3}\frac{y_n}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt[3]{n}}{3n^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{n}}.$$

   c) On a $x_n = y_n + n = n + z_n - \sqrt[3]{n} \underset{+\infty}{=} n - \sqrt[3]{n} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$.