Correction de quelques exercices de la feuille de TD 20

Exercice 2. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x \sin(x)$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

Correction : La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions qui le sont. Montrons la formule par récurrence sur n.

- On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(0)}(x) = f(x) = 2^{0/2} e^x \sin(x+0)$. Ainsi la formule est vraie au rang 0.
- Supposons qu'elle est vrai au rang n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) &= 2^{n/2} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + 2^{n/2} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \\ &= 2^{(n+1)/2} e^x \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^{(n+1)/2} e^x \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)\right) \\ &= 2^{(n+1)/2} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2^{(n+1)/2} e^x \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $n+1$.

Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Exercice 4. Soit $x \in \mathbb{R} \Big\backslash \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \dfrac{\tan^{(n)}(x)}{n!}$. Montrer que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad (n+1) a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(n+1) \frac{\tan^{(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{(\tan')^{(n)}}{n!} = \frac{(1+\tan^2)^{(n)}}{n!} = \frac{(\tan^2)^{(n)}}{n!}.$$

La formule de Leibniz entraîne donc que

$$(n+1) \frac{\tan^{(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}}{k!} \frac{\tan^{(n-k)}}{(n-k)!}.$$

En évaluant en $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on obtient que $(n+1) a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $n+1$ points $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ vérifiant $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n+1})$. Montrer qu'il existe $c \in \left]a_1, a_{n+1}\right[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Application : Si P désigne un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus $n+1$ solutions.

Correction :

- Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la fonction f est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$, dérivable sur $]a_k, a_{k+1}[$, $f(a_k) = f(a_{k+1})$ donc le théorème de Rolle entraîne qu'il existe $b_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $f'(b_k) = 0$.

  Pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, la fonction f' est continue sur $[b_k, b_{k+1}]$, dérivable sur $]b_k, b_{k+1}[$, $f'(b_k) = f'(b_{k+1})$ donc le théorème de Rolle entraîne qu'il existe $c_k \in]b_k, b_{k+1}[$ tel que $f''(c_k) = 0$.

  Pour tout $k \in [\![1,n-2]\!]$, la fonction f'' est continue sur $[c_k, c_{k+1}]$, dérivable sur $]c_k, c_{k+1}[$, $f''(c_k) = f''(c_{k+1})$ donc le théorème de Rolle entraîne qu'il existe $d_k \in]c_k, c_{k+1}[$ tel que $f^{(3)}(d_k) = 0$.

  et ainsi de suite (on applique ainsi $n-1$ fois successivement le théorème de Rolle). On obtient qu'il existe $c \in]a_1, a_{n+1}[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
- Application : Raisonnons par l'absurde et supposons que l'équation $P(x) = e^x$ admet au moins $n+2$ solutions. La fonction $f : x \longmapsto e^x - P(x)$ est alors $n+2$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $n+2$ points distincts. Le résultat montré dans l'exercice entraîne qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$, c'est-à-dire $e^c = e^c - P^{(n+1)}(c) = 0$. C'est absurde.

Exercice 15. Déterminer les maxima et minima locaux des fonctions suivantes :

$$1)\ x \longmapsto x^5 - 15x^3 + 12, \qquad 2)\ x \longmapsto \ln\left(\frac{2019x}{1+x^2}\right).$$

Correction :

1) Cherchons les points critiques de la fonction $f : x^5 - 15x^3 + 12$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4 - 45x^2 = 5x^2(x^2-9)$. On a $f'(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{-3, 0, 3\}$.

   Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 20x^3 - 90x = 10x(2x^2-9)$. On a

   - $f'(-3) = -30(18-9) < 0$ donc -3 est un maximum local.
   - $f'(3) = 30(18-9) > 0$ donc 3 est un minimum local.
   - $f'(0) = 0$ donc on ne peut pas conclure directement avec la condition suffisante vue en cours. Par contre on a

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - f(0) = x^5 - 15x^3 = x^3(x^2-15) \begin{cases} < 0 & \text{si} \quad x \in]0,1] \\ > 0 & \text{si} \quad x \in [-1,0[. \end{cases}$$

   Le signe de $f(x) - f(0)$ varie lorsque x est au voisinage de 0. Ainsi 0 n'est pas un extremum local.

2) Cherchons les points critiques de la fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\frac{2019x}{1+x^2}\right)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

   $$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}.$$

   On a $f'(x) = 0$ si et seulement si $1 - x^2 = 0$ si et seulement si $x = 1$.

   Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

   $$f''(x) = \frac{-2x^2(1+x^2) - (3x^2+1)(1-x^2)}{x^2(1+x^2)^2}.$$

   Et on calcule que $f''(1) = -1 < 0$. Ainsi 1 est un maximum local et c'est le seul extremum local de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 17. Soit $f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. Notons $M_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$. L'objectif de cet exercice est de montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et d'obtenir une majoration de $M_1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ à partir de M_0 et M_2.

1) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$,

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leqslant \frac{M_2 h^2}{2}, \qquad \text{et} \qquad \left|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\right| \leqslant \frac{M_2 h^2}{2}.$$

2) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$.

3) En déduire que f' est bornée et que $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

Correction :

1) Soient $h \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à la fonction f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$
   - (avec $a = x$ et $b = x + h$) :
   $$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leqslant \frac{(x+h-x)^2}{2} \sup_{t\in[x,x+h]} |f''(t)| \leqslant \frac{M_2h^2}{2}.$$
   - (avec $a = x$ et $b = x - h$) :
   $$\left|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\right| \leqslant \frac{(x-h-x)^2}{2} \sup_{t\in[x-h,x]} |f''(t)| \leqslant \frac{M_2h^2}{2}.$$

2) On a
$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) - (f(x+h) - f(x) - hf'(x) = f(x+h) - f(x-h) + 2hf'(x)$$
donc, par inégalité triangulaire,
$$|f(x+h)-f(x-h)+2hf'(x)| \leqslant \left|f(x+h)-f(x)-hf'(x)\right|+\left|f(x-h)-f(x)+hf'(x)\right| \leqslant \frac{M_2h^2}{2}+\frac{M_2h^2}{2} = M_2h^2$$
puis
$$\begin{aligned}|2hf'(x)| &= \left|f(x+h) - f(x-h) + 2hf'(x) - f(x+h) + f(x-h)\right| \\ &\leqslant \left|f(x+h) - f(x-h) + 2hf'(x)\right| + \left|f(x+h)\right| + \left|f(x-h)\right| \\ &\leqslant M_2h^2 + M_0 + M_0.\end{aligned}$$
et donc $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2h}{2}$.

3) La fonction $\varphi : h \longmapsto \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2h}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $h > 0$, $\varphi'(h) = -\dfrac{M_0}{h^2} + \dfrac{M_2}{2} \geqslant 0$ si et seulement si $h^2 \leqslant \dfrac{2M_0}{M_2}$. Ainsi φ est croissante sur $]0, \sqrt{2M_0/M_2}]$ et décroissante sur $[\sqrt{2M_0/M_2}, +\infty[$. Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\varphi(h) \leqslant \varphi\left(\sqrt{2M_0/M_2}\right) = \frac{M_0\sqrt{M_2}}{\sqrt{2M_0}} + \frac{M_2\sqrt{2M_0}}{2\sqrt{M_2}} = \sqrt{2M_0M_2}.$$
Ainsi f' est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 18. Soit $f \in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle qu'il existe $a > 0$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{n!}{a^n} \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(0) = 0.$$

1) Montrer que f est nulle sur $]-a,a[$ puis sur $\left]-\frac{a}{2},\frac{3a}{2}\right[$.
2) Montrer que f est la fonction nulle.

Correction :

1) Soit $x \in]-a,a[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n à la fonction f de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. On a

$$|f(x)| = |f(x) - 0| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[0,x]}\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{a^{n+1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

puisque $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$. Ainsi, par encadrement, $f(x) = 0$.Nous en déduisons que f est nulle sur $]-a,a[$.

En particulier $f^{(n)}(a/2) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in]-a/2, 3a/2[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n à la fonction f de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}|f(x)| = |f(x) - 0| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a/2)}{k!}\left(x - \frac{a}{2}\right)^k\right| &\leqslant \frac{\left|x - \frac{a}{2}\right|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[a/2,x]}\left|f^{(n+1)}(t)\right| \\ &\leqslant \frac{\left|x - \frac{a}{2}\right|^{n+1}}{a^{n+1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}.$$

puisque $\left|\frac{x - a/2}{a}\right| < 1$. Ainsi, par encadrement, $f(x) = 0$. Nous en déduisons que f est nulle sur $]-a/2, 3a/2[$.

2) On répète ce procédé et on montre successivement que f est nulle sur $]0, 2a[$ puis sur $]a/2, 5a/2[$ puis sur $]a, 3a[$, etc. On obtient ainsi que f est nulle sur $\mathbb{R}_+$ (par récurrence). Et on montre de même que c'est le cas sur $\mathbb{R}_-$.