Correction de quelques exercices de la feuille de TD 1

Exercice 1. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. A l'aide de tables de vérité, montrer que :

1) $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}))$ (ou est distributive sur et),
2) $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$ (et est distributive sur ou).
3) $\big((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \text{ et } (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})\big) \Rightarrow \big(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}\big)$ (transitivité de l'implication, syllogisme).

Correction :

1) Traitée en cours.
2) On construit les tables de vérité de $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C})$ et $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$	$(\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B})$ et $\mathcal{C}$	$\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$	$\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$	$(\mathcal{A}$ et $\mathcal{C})$ ou $(\mathcal{B}$ et $\mathcal{C})$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Ainsi $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C})$ et $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$ sont équivalentes.

3) Traitée en cours.

Exercice 5. Montrer que les phrases « Ceux qui parlent ne savent pas » et « Ceux qui savent ne parlent pas » sont équivalentes.

Correction : La phrase « Ceux qui parlent ne savent pas » est équivalent à l'implication « parler $\Rightarrow$ non(savoir) ». Elle même est équivalent à sa contraposée « savoir $\Rightarrow$ non(parler) », c'est-à-dire « Ceux qui savent ne parlent pas ».

Exercice 7. Pour chacune des propositions suivantes, étudier si elle est vraie ou fausse et écrire sa négation. Rédiger également en français chaque proposition si elle est vraie, sa négation si elle est fausse.

1) $\exists y \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ xy = 1.$
2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists k \in \mathbb{N},\ x^k \geqslant 2.$
3) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\},\ \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \big(x^n = y^n$ et $x \neq y\big).$
4) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \implies \dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon\right).$

Correction :

1) Considérons la proposition $(\exists y \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ xy = 1)$.
   - En français, on peut l'écrire « Il existe un réel y non nul tel que tout réel non nul x vérifie $xy = 1.$ ».
   - Elle est fausse puisque sa négation $(\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ xy \neq 1)$ est vraie. En effet, si y est un réel non nul, le réel non nul $x = \dfrac{2}{y}$ vérifie bien $xy = 2 \neq 1.$
2) Considérons la proposition $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists k \in \mathbb{N},\ x^k \geqslant 2)$.
   - En français, on peut l'écrire « Quel que soit le réel x non nul, il existe un entier k tel que $x^k < 2$ ».
   - Elle est fausse puisque sa négation $(\exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall k \in \mathbb{N},\ x^k < 2)$ est vraie. En effet le réel $x = 1$ vérifie bien $1^k < 2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3) Traitée en cours.

4) Considérons la proposition $\left(\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \implies \dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon\right)\right)$.

   - En français, on peut l'écrire « Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 non nul tel que tout entier n naturel supérieur à n_0 vérifie $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ ». Cela signifie que la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 (on reverra ça dans quelques semaines).
   - Elle est vraie. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $n_0 = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$ de telle sorte que $\dfrac{1}{\varepsilon} < n_0$. Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \geqslant n_0$, alors $n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ et donc $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.

     Sa négation est $\left(\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant n_0 \text{ et } \dfrac{1}{n} > \varepsilon\right)\right)$.

Exercice 8. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en langage mathématique les phrases suivantes, puis les nier :

1) f est strictement croissante.
2) f est minorée par le réel m.
3) f est majorée.
4) f est constante.
5) f est la fonction nulle.
6) f s'annule.
7) f est 2π-périodique.
8) f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Correction :

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y)$.

   Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ (x < y$ et $f(x) \geqslant f(y))$.
2) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant m$.

   Sa négation est $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < m$.
3) $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$.

   Sa négation est $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > M$.
4) $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha$.

   Sa négation est $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq \alpha$.

   Autre définition possible : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$. Sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(0)$.
5) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.

   Sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.
6) $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.

   Sa négation est : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.
7) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + 2\pi) = f(x)$.

   Sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x + 2\pi) \neq f(x)$
8) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ (x \neq y \ \Rightarrow\ f(x) \neq f(y))$.

   Sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ (x \neq y$ et $f(x) = f(y))$.

Exercice 10. Un scénario de Lewis Carroll : *De deux choses l'une : ou bien le malfaiteur est venu en voiture, ou bien le témoin s'est trompé. Si le malfaiteur avait un complice, alors il est venu en voiture. Le malfaiteur n'avait pas de complice et n'avait pas la clé, ou le malfaiteur avait un complice et avait la clé. Le malfaiteur avait la clé. Que faut-il conclure de tout cela ? Que peut-on conclure dans le cas où le malfaiteur n'avait pas la clé ?*

Correction : Le malfaiteur avait la clé. La phrase « le malfaiteur n'avait pas de complice et n'avait pas la clé » est donc fausse. Nous en déduisons que la phrase « le malfaiteur avait un complice et avait la clé » est vraie. En particulier il avait un complice. Il est donc venu en voiture. Enfin le témoin ne s'est pas trompé.

Maintenant si le malfaiteur n'avait pas la clé, la phrase « malfaiteur avait un complice et avait la clé » est fausse. Par conséquent la phrase « le malfaiteur n'avait pas de complice et n'avait pas la clé » est donc vraie. En particulier il n'avait pas de complice. Par contre on ne pas conclure s'il est venu en voiture (et donc on ne sait pas si le témoin s'est trompé ou pas).

Exercice 11. Montrer les propositions suivantes par l'absurde ou pas contraposée :

1) Si a et b sont deux entiers tels que $b \neq 0$, alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *(on admet que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).*
2) Soit n un entier naturel. Montrer que, si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
3) Soit x un réel. Montrer l'implication : $\big(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leqslant \varepsilon\big) \ \Rightarrow\ x = 0.$
4) Si x est un irrationnel positif, alors $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) Traitée en cours.
4) Raisonnons par l'absurde. Supposons que x est un irrationnel positif et que $\sqrt{x}$ est rationnel. Il existe alors deux entiers naturels p et q non nuls tels que $\sqrt{x} = \dfrac{p}{q}$. Ainsi $x = \dfrac{p^2}{q^2} \in \mathbb{Q}$. C'est absurde. Ainsi $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Exercice 12. Dans le plan, on considère $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ des cercles de rayon 1 et de centres respectifs $A(a, \alpha)$ et $B(b, \beta)$. On rappelle que la distance entre A et B est donnée par la formule $d(A, B) = \sqrt{(a-b)^2 + (\alpha - \beta)^2}$. On note P la proposition « Les cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ s'intersectent » et Q la proposition « $d(A, B) \leqslant 2$ ».

1) Écrire en français ce que signifient :
   a) la contraposée de l'implication $Q \ \Rightarrow\ P$,
   b) la réciproque de l'implication $P \ \Rightarrow\ Q$,
   c) la contraposée de la réciproque de l'implication $\mathrm{non}(P) \ \Leftarrow\ Q$.
2) Écrire avec des quantificateurs la proposition P, puis sa négation.
3) Ecrire le début de la rédaction des raisonnements suivants :
   a) Prouver $Q \ \Rightarrow\ P$ par contraposée.
   b) Prouver $P \ \Rightarrow\ Q$ par l'absurde
   c) Prouver la contraposée de la réciproque de $Q \ \Rightarrow\ P$ par l'absurde.

Correction :

1) a) La contraposée de l'implication $Q \ \Rightarrow\ P$ est l'implication $\mathrm{non}(P) \ \Rightarrow\ \mathrm{non}(Q)$. Il s'agit donc de la proposition « Si les cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ ne s'intersectent pas, alors $d(A, B) > 2$. »
   b) La réciproque de l'implication $P \ \Rightarrow\ Q$ est l'implication $Q \ \Rightarrow\ P$. Il s'agit donc de la proposition « Si $d(A, B) \leqslant 2$, alors les cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ s'intersectent. »
   c) La contraposée de la réciproque de l'implication $\mathrm{non}(P) \ \Leftarrow\ Q$ est la contraposée de l'implication $\mathrm{non}(P) \ \Rightarrow\ Q$, c'est-à-dire l'implication $\mathrm{non}(Q) \ \Rightarrow\ P$. Il s'agit donc de la proposition « Si $d(A, B) > 2$, alors les cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ s'intersectent. »
2) La proposition P est

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \qquad \big((x-a)^2 + (y-\alpha)^2 = 1 \quad \text{et} \quad (x-b)^2 + (y-\beta)^2 = 1\big).$$

Sa négation est donc la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad \big((x-a)^2 + (y-\alpha)^2 \neq 1 \quad \text{ou} \quad (x-b)^2 + (y-\beta)^2 \neq 1\big).$$

Cette négation est encore équivalente à la proposition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad \big((x-a)^2 + (y-\alpha)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad (x-b)^2 + (y-\beta)^2 \neq 1\big).$$

3) a) Montrons $Q \Rightarrow P$ par contraposée. Supposons que les cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ ne s'intersectent pas et montrons que $d(A, B) > 2$.

b) Montrons $P \Rightarrow Q$ par l'absurde. Supposons que les cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ s'intersectent et que $d(A, B) > 2$. On cherche une contradiction.

c) La contraposée de la réciproque de $Q \Rightarrow P$ est la proposition $\mathrm{non}(Q) \Rightarrow \mathrm{non}(P)$. Montrons-la par l'absurde : on suppose que $d(A, B) > 2$ et que les cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ s'intersectent. On cherche une contradiction.

Exercice 13. A l'aide d'un raisonnement par analyse/synthèse, déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que, pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Correction :

- *Analyse :* Supposons que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Fixons $y \in \mathbb{R}$ et dérivons selon la variable x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x+y) = f'(x).$$

Si on prend $x = 0$, on obtient $f'(y) = f'(0)$. Mais cela est valable pour tout $y \in \mathbb{R}$. Nous en déduisons que f' est une fonction constante. Ainsi il existe deux réels a et b tels que que $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, $f(2) = f(1+1) = 2f(1)$ donc $2a + b = 2a + 2b$ et donc $b = 0$.

- *Synthèse :* Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

Par ailleurs f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.

- *Conclusion :* Les fonctions recherchées sont les fonctions linéaires.

Exercice 15. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \ldots, p_k$ des nombres premiers. Montrer que l'entier $N = 1 + p_1 p_2 \ldots p_k$ n'est divisible par aucun des p_i, $i \in [\![1, k]\!]$. En déduire, par l'absurde, qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Correction : Supposons qu'il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que p_i divise N. Puisque p_i divise $p_1 p_2 \ldots p_k$, on a p_i divise $N - p_1 p_2 \ldots p_k = 1$. C'est absurde. Nous en déduisons que N n'est divisible par aucun des p_i, $i \in [\![1, k]\!]$.

Supposons maintenant qu'il existe un nombre fini de nombres premiers. Si k désigne le nombre de nombres premiers, et si on les notes $p_1, \ldots, p_k$, alors le nombre $N = 1 + p_1 p_2 \ldots p_k$ ne peut pas être premier (il est strictement plus grand que tous les nombres premiers). Il est donc divisible par un nombre premier (l'un des p_i, $i \in [\![1, k]\!]$), mais on a vu que c'était absurde. Nous en déduisons que l'ensemble des nombres premiers est infini.
