Correction de quelques exercices de la feuille de TD 19

Exercice 1 – Vitesses de convergence.

1) Montrer que les suites de termes généraux $n\ln(n)$, $\dfrac{n^2}{(\ln(n))^{10!}}$, $\dfrac{3^n}{n^3}$, $n^{3/2}$, $2^n\ln(n)$ tendent toutes vers $+\infty$. Classez-les de la plus lente à la plus rapide (c'est-à-dire par ordre croissant pour la négligeabilité).
2) Montrer que les suites de termes généraux $\dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}$, $n^{1000}e^{-n}$, $\dfrac{n}{4^n}$, $\dfrac{1}{n^2(\ln(n))^{100}}$, $\dfrac{1}{n^2}$ tendent toutes vers 0. Classez-les de la plus rapide à la plus lente (c'est-à-dire par ordre croissant pour la négligeabilité).

Correction :

1) Traitée en cours.
2) On a l'échelle : $0 \quad \dfrac{n}{4^n} \quad n^{1000}e^{-n} \quad \dfrac{1}{n^2(\ln(n))^{100}} \quad \dfrac{1}{n^2} \quad \dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}$

   En effet

   - $\dfrac{n/4^n}{n^{1000}e^{-n}} = \left(\dfrac{e}{4}\right)^n \dfrac{1}{n^{999}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en tant que produit de deux suites qui convergent vers 0, puisque $0 < \dfrac{e}{4} < 1$. Ainsi $\dfrac{n}{4^n} = o\left(n^{1000}e^{-n}\right)$.
   - $\dfrac{n^{1000}e^{-n}}{1/\left(n^2(\ln(n))^{100}\right)} = n^{1002}e^{-n}(\ln(n))^{100} = n^{1003}e^{-n} \times \dfrac{(\ln(n))^{100}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi $n^{1000}e^{-n} = o\left(\dfrac{1}{n^2(\ln(n))^{100}}\right)$.
   - $\dfrac{1/\left(n^2(\ln(n))^{100}\right)}{1/n^2} = \dfrac{1}{(\ln(n))^{100}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\dfrac{1}{n^2(\ln(n))^{100}} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   - $\dfrac{1/n^2}{(\ln(n))^2/n^2} = \dfrac{1}{(\ln(n))^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}\right)$.

Exercice 3. Parmi les fonctions f et g suivantes, laquelle est négligeable devant l'autre ?

1) $f : x \longmapsto x\sin(x)\tan(x)$ et $g : x \longmapsto (e^x-1)^2$ en 0,
2) $f : x \longmapsto (\ln(x))^2$ et $g : x \longmapsto x\ln(\ln(x))$ en $+\infty$,
3) $f : x \longmapsto x^5$ et $g : x \longmapsto e^{-1/\sqrt{x}}$ en 0^+,
4) $f : x \longmapsto \ln(\sqrt{x})\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ et $g : x \longmapsto \ln(x^3)\sin^2\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$.

Correction :

1) On a $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x\sin(x)\tan(x)}{(e^x-1)^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{x^2} \underset{0}{\sim} x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $f(x) \underset{0}{=} o(g(x))$.

2) On a $\ln(\ln(x)) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et, par croissances comparées, $\dfrac{(\ln(x))^2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Ainsi $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{\ln(\ln(x))}\dfrac{(\ln(x))^2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $f(x) \underset{+\infty}{=} o(g(x))$.

3) Traitée en cours.

4) Traitée en cours.

Exercice 5. Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$,

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}e^{-1/\sqrt{x}}$,

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{5x+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{3x+1}}{7x+4}\right)$,

4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\sin\left(\frac{5x^2}{7x^3+3x^2+1}\right)$,

5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1+x^2)\big(e^{\cos(1/x)}-e\big)$,

6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin(x)\ln(\tan(x))$,

7) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\ln(1-x)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$,

8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2(x)}{\tan(x)(1-\cos(x))}$,

9) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}-\sqrt[3]{x}\right)$,

10) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.

Correction : La plupart ont été traitées en cours.

7) On a $\ln(1-(1-h))\cos\left(\dfrac{\pi(1-h)}{2}\right)=\ln(h)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi h}{2}\right)=\ln(h)\sin\left(\dfrac{\pi h}{2}\right)\underset{h\to 0^+}{\sim}\ln(h)\dfrac{\pi h}{2}$ puisque $\dfrac{\pi h}{2}\underset{h\to 0}{\longrightarrow}0$. Par croissances comparées, $h\ln(h)\underset{h\to 0^+}{\longrightarrow}0$. Il s'ensuit que

$$\ln(1-(1-h))\cos\left(\frac{\pi(1-h)}{2}\right)\underset{h\to 0^+}{\longrightarrow}0$$

et donc $\ln(1-x)\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow}0$.

8) On a $\dfrac{x\sin^2(x)}{\tan(x)(1-\cos(x))}\underset{0}{\sim}\dfrac{x\cdot x^2}{x\cdot x^2/2}\underset{0}{\sim}2$ et donc $\dfrac{x\sin^2(x)}{\tan(x)(1-\cos(x))}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}2$.

9) Il est hors de question d'essayer d'utiliser la formule $(1+x)^\alpha-1$ directement puisqu'on fait tendre x vers $+\infty$.

On a

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}\left(\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}}{\sqrt[3]{x}}-1\right)&=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}{x}}-1\right)\\&=\sqrt[3]{x}\left((1+u(x))^{1/3}-1\right),\end{aligned}$$

avec $u(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}{x}=\sqrt[3]{\dfrac{x+\sqrt[3]{x}}{x^3}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^{8/3}}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Ainsi

$$\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}-\sqrt[3]{x}\underset{+\infty}{\sim}\sqrt[3]{x}\frac{u(x)}{3}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{5/3}}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n}=e$.

Correction : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)^{u_n}=\exp\left(u_n\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)\right)$.
Or $\dfrac{1}{u_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)\sim\dfrac{1}{u_n}$ et donc $u_n\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)\sim u_n\dfrac{1}{u_n}=1$. Nous en déduisons que $u_n\ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$ et donc, par continuité de $\exp$ en 1, on obtient $\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)^{u_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e$.

Exercice 8. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $k \in [\![0,n-2]\!]$, $0 \leqslant \dfrac{k!}{n!} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$.
En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Pour tout $k \in [\![0,n-2]\!]$, on a $k! \leqslant (n-2)!$ donc $0 \leqslant \dfrac{k!}{n!} \leqslant \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$.
Ainsi

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}.$$

Nous ne déduisons, par encadrement, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Enfin $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{n!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ si bien que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$.

Exercice 9. 1) Donner un équivalent de $u_n = -\dfrac{2019}{\pi^n} + o\left(e^{-2n}\right) + o\left(\dfrac{1}{\pi^n}\right)$ quand $n \to +\infty$.

2) Donner un équivalent de $v_n = \sqrt{2\pi n} - \dfrac{n^3}{\ln(n)} - 2019 + \ln(n) + 2n^3 + o(n^3) + o(1)$ quand $n \to +\infty$.

3) Donner un équivalent de $f(x) = 2019 + x - o(x) - x^2 + o(x^3) + x^4 + o(1)$ quand $x \to 0$ puis $x \to +\infty$.

4) Donner un équivalent de $g(x) = \sqrt{x} + o(7x\ln(x)) + x^5 - 5x^5\ln(x) + o(x^5)$ quand $x \to 0$ puis $x \to +\infty$.

Correction :

1) Par croissances comparées, $\pi^n e^{-2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{-2n} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\pi^n}\right)$ donc $o(e^{-2n}) \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\pi^n}\right)$ et donc

$$u_n \underset{+\infty}{=} -\frac{2019}{\pi^n} + o\left(\frac{1}{\pi^n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2019}{\pi^n}.$$

2) On a $\sqrt{2\pi n} \underset{+\infty}{=} o\left(n^3\right)$, $\dfrac{n^3}{\ln(n)} \underset{+\infty}{=} o\left(n^3\right)$, $2019 \underset{+\infty}{=} o\left(n^3\right)$, $\ln(n) \underset{+\infty}{=} o\left(n^3\right)$ (par croissances comparées) et $o(1) \underset{+\infty}{=} o\left(n^3\right)$. Ainsi $v_n \underset{+\infty}{=} 2n^3 + o(n^3) \underset{+\infty}{\sim} 2n^3$.

3)
- On a $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2019$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} 2019$.
- On a $\dfrac{f(x)}{x^4} \underset{+\infty}{=} \dfrac{2019}{x^4} + \dfrac{1}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right) - \dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x}\right) + 1 + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^4$.

4)
- On a $\dfrac{g(x)}{\sqrt{x}} \underset{0}{=} 1 + o\left(7\sqrt{x}\ln(x)\right) + x^{9/2} - 5x^{9/2}\ln(x) + o(x^{9/2})$. Par croissances comparées, on a $\sqrt{x}\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $x^{9/2}\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{g(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Ainsi $g(x) \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$.
- On a $\dfrac{g(x)}{x^5\ln(x)} \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x^{9/2}\ln(x)} + o\left(\dfrac{7}{x^4}\right) + \dfrac{1}{\ln(x)} - 5 + o\left(\dfrac{1}{\ln(x)}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -5$. Ainsi $g(x) \underset{+\infty}{\sim} -5x^5\ln(x)$.

Exercice 10. Donner un équivalent simple et la limite des suites de terme général :

1) $\pi n - 4\ln(n)$,
2) $\sqrt{n^2+3n} - n$,
3) $\dfrac{n^{100!} - 10\,n! + 100^n}{10n + \sin(n) + \sqrt{n}\ln(n) + n^{100}e^{-n}}$,
4) $1 - 2n^4 + 9n^3\cos(n) + 7n^5\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$,
5) $\sin\left(\dfrac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5}\right)$,
6) $\dfrac{\ln(n)}{n+1} - \dfrac{\ln(n+1)}{n}$,
7) $\dfrac{4-3n^2}{\sqrt[3]{4n^5-n^2+6}}$,
8) $\ln\left(\cos\left(\tan\left(3e^{-n}\right)\right)\right)$,
9) $\dfrac{1}{n} + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
10) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{3^k}$,
11) $n - \sqrt[4]{n^4\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}$,

Correction :

1) On a $\ln(n) \underset{+\infty}{=} o(n)$ donc $\pi n - 4\ln(n) \underset{+\infty}{=} \pi n + o(n) \underset{+\infty}{\sim} \pi n$. D'où $\pi n - 4\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2) On a
$$\sqrt{n^2+3n} - n = n\left(\frac{\sqrt{n^2+3n}}{n} - 1\right) = n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} n\,\frac{1}{2}\frac{3}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2}$$
car $\dfrac{3}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $\sqrt{n^2+3n} - n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3}{2}$.
3) Par croissances comparées, on a $n^{100!} \underset{+\infty}{=} o(n!)$, $100^n \underset{+\infty}{=} o(n!)$ donc
$$n^{100!} - 10\,n! + 100^n \underset{+\infty}{=} o(n!) - 10n! + o(n!) = -10n! + o(n!) \underset{+\infty}{=} -10n!.$$
Ensuite $\sin(n) \underset{+\infty}{=} o(n)$ (puisque $\sin$ est bornée par 1), $\sqrt{n}\ln(n) \underset{+\infty}{=} o(n)$ (puisque, par croissances comparées, $\ln(n) \underset{+\infty}{=} o(\sqrt{n})$) et $n^{100}e^{-n} \underset{+\infty}{=} o(n)$ (puisque $n^{99}e^{-n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées). Ainsi
$$10n + \sin(n) + \sqrt{n}\ln(n) + n^{100}e^{-n} \underset{+\infty}{=} 10n + o(n) + o(n) + o(n) \underset{+\infty}{=} 10n + o(n) \underset{+\infty}{\sim} 10n.$$
Nous en déduisons que
$$\frac{n^{100!} - 10\,n! + 100^n}{10n + \sin(n) + \sqrt{n}\ln(n) + n^{100}e^{-n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-10n!}{10n} \underset{+\infty}{\sim} -(n-1)!.$$
Et donc $\dfrac{n^{100!} - 10\,n! + 100^n}{10n + \sin(n) + \sqrt{n}\ln(n) + n^{100}e^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
4) On a $7n^5\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 7n^4$ puisque $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ensuite $1 - 2n^4 \underset{+\infty}{=} o(n^4)$ et $9n^3\cos(n) \underset{+\infty}{=} o(n^4)$ puisque $\cos$ est bornée. Ainsi
$$1 - 2n^4 + 9n^3\cos(n) + 7n^5\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{=} o(n^4) + o(n^4) + 7n^4 + o(n^4) \underset{+\infty}{=} 7n^4 + o(n^4) \underset{+\infty}{\sim} 7n^4.$$
Ainsi $1 - 2n^4 + 9n^3\cos(n) + 7n^5\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
5) On a $\dfrac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2n^2}{3n^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc
$$\sin\left(\frac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3n}.$$
Ainsi $\sin\left(\dfrac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
6) Traitée en cours.
7) On a $4n^5 - n^2 + 6 \underset{+\infty}{\sim} 4n^5$ donc $\sqrt[3]{4n^5-n^2+6} = (4n^5-n^2+6)^{1/3} \underset{+\infty}{\sim} (4n^5)^{1/3}$. Ainsi
$$\frac{4-3n^2}{\sqrt[3]{4n^5-n^2+6}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-3n^2}{(4n^5)^{1/3}} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}n^{2-5/3} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{n}.$$
Ainsi $\dfrac{4-3n^2}{\sqrt[3]{4n^5-n^2+6}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
8) On a $3e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\tan\left(3e^{-n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tan(0) = 0$ par continuité de $\tan$ en 0. Puisque $\cos$ est continue en 0, nous en déduisons que $\cos\big(\tan\left(3e^{-n}\right)\big) - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi
$$\begin{aligned}\ln\Big(\cos\big(\tan\left(3e^{-n}\right)\big)\Big) &= \ln\Big(1 + \cos\big(\tan\left(3e^{-n}\right)\big) - 1\Big)\\ &\underset{+\infty}{\sim} \cos\big(\tan\left(3e^{-n}\right)\big) - 1 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\big(\tan(3e^{-n})\big)^2 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\left(3e^{-n}\right)^2 \underset{+\infty}{\sim} -\frac{9e^{-2n}}{2}.\end{aligned}$$
Et donc $\ln\Big(\cos\big(\tan\left(3e^{-n}\right)\big)\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

9) Traitée en cours.

10) Traitée en cours.

11) On a

$$n-\sqrt[4]{n^4\cos\left(\frac{1}{n}\right)}=n\left(1-\sqrt[4]{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\right)=-n\left(\sqrt[4]{1+\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)}-1\right).$$

Puisque $\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on a

$$n-\sqrt[4]{n^4\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\underset{+\infty}{\sim}-n\frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{n}{4}\frac{1}{2n^2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{8n}.$$

Et donc $n-\sqrt[4]{n^4\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$

Exercice 11. Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes :

1) $x\longmapsto\ln\left(1+\frac{1}{\ln(x)}\right)$ en $+\infty$.

2) $x\longmapsto\text{Arctan}(\ln(x))$ en 1.

3) $x\longmapsto(x^4-3x^2+7)e^{1/x}$ en $+\infty$,

4) $x\longmapsto\sqrt[7]{x}-1$ en 1,

5) $x\longmapsto\sqrt{\frac{8x^5+3x^4+5x+1}{2x^3-5x^2+2019}}$ en $+\infty$,

6) $\ln(3-x)-\ln(\sqrt{5}-x)$ en $-\infty$,

7) $x\longmapsto\sqrt{6+x}-3$ en 3,

8) $x\longmapsto\frac{x^2+\ln(x)}{5+xe^{-x}}$ en 0^+ puis en $+\infty$,

9) $x\longmapsto x\sqrt[5]{\ln(1+x)}$ en 0^+ puis en $+\infty$,

10) $x\longmapsto\ln(2\sin(x))$ en $\frac{\pi}{6}$.

Correction : La plupart ont été traitées en cours.

5) $\sqrt{\frac{8x^5+3x^4+5x+1}{2x^3-5x^2+2019}}\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{8x^5}{2x^3}}\underset{+\infty}{\sim}2x.$

6) $\ln(3-x)-\ln(\sqrt{5}-x)=\ln\left(\frac{3-x}{\sqrt{5}-x}\right)=\ln\left(1+\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-x}\right)\underset{-\infty}{\sim}\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-x}$ puisque $\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-x}\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0.$

Il s'ensuit que $\ln(3-x)-\ln(\sqrt{5}-x)\underset{-\infty}{\sim}\frac{\sqrt{5}-3}{x}.$

7) On a

$$\sqrt{6+3+h}-3=3\left(\sqrt{1+\frac{h}{9}}-1\right)\underset{h\to0}{\sim}3\frac{1}{2}\frac{h}{9}\underset{h\to0}{\sim}\frac{h}{6}.$$

Ainsi, par substitution, $\sqrt{6+x}-3\underset{x\to3}{\sim}\frac{x-3}{6}.$

8)
- On a $x^2\underset{0^+}{=}o\left(\ln(x)\right)$ donc $x^2+\ln(x)\underset{0^+}{\sim}\ln(x)$. On a $xe^{-x}\underset{x\to0}{\longrightarrow}5$ donc $\frac{x^2+\ln(x)}{5+xe^{-x}}\underset{0^+}{\sim}\frac{\ln(x)}{5}.$
- Par croissances comparées, $\ln(x)\underset{+\infty}{=}o\left(x^2\right)$ donc $x^2+\ln(x)\underset{+\infty}{\sim}x^2$. Par croissances, comparées, on a $xe^{-x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}5$ donc $\frac{x^2+\ln(x)}{5+xe^{-x}}\underset{+\infty}{\sim}\frac{x^2}{5}.$

10) Pour tout h au voisinage de 0,

$$\begin{aligned}\ln\left(2\sin\left(h+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\ln\left(2\sin(h)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+2\cos(h)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)&=\ln\left(\sqrt{3}\sin(h)\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos(h)\right)\\&=\ln(1+u(h))\underset{h\to0}{\sim}u(h)\end{aligned}$$

avec $u(h)=\sqrt{3}\sin(h)+\cos(h)-1 \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. On a $\sin(h) \underset{h\to 0}{=} o(h)$ et $\cos(h)-1 \underset{h\to 0}{\sim} -\dfrac{h^2}{2} \underset{h\to 0}{=} o(h)$ donc $u(h) \underset{h\to 0}{=} \sqrt{3}(h+o(h))+o(h) \underset{h\to 0}{\sim} \sqrt{3}h$. Nous en déduisons que

$$\ln\left(2\sin\left(h+\frac{\pi}{6}\right)\right) \underset{h\to 0}{\sim} \sqrt{3}h$$

et donc $\ln(2\sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{3}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 13. A l'aide de sommes de Riemann, calculer des équivalents des suites suivantes :

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha},\quad \alpha>0, \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+2k)^3}, \qquad 3)\ \sum_{k=1}^{n} k\cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right).$$

Correction :

1) Traité en cours.
2) Traité en cours.
3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right) = n^2\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right).$$

La fonction $x\longmapsto x\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x^2\right)$ est continue sur $[0,1]$ donc le théorème de convergence des sommes de Riemann entraîne que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\pi}{2}2x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}.$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right) \sim \frac{n^2}{\pi}$.

Exercice 14 – D'après l'oral ESCP 2006. A l'aide du théorème d'encadrement et d'un équivalent usuel, calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\ln(k)}{n^2}\right).$$

Correction : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\ln(k)}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\ln(k)}{n^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

puisque, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $1+\dfrac{\ln(k)}{n^2}\leqslant 1+\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ et $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a donc

$$0\leqslant \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\ln(k)}{n^2}\right)\right) \leqslant n\ln\left(1+\frac{\ln(n)}{n^2}\right).$$

Or, par croissances comparées, $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $n\ln\left(1+\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} n\dfrac{\ln(n)}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$ et donc $n\ln\left(1+\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ encore par croissances comparées.

Par encadrement, nous en déduisons que $\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\ln(k)}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Enfin, par continuité de $\exp$ en 0, on obtient $\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\ln(k)}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
2) En déduire que
$$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \qquad \ln(k+1)-\ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k)-\ln(k-1).$$
3) Donner un équivalent simple de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Correction :

1) Classique : on fait une étude de fonction.
2) Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Puisque $\frac{1}{k} > -1$, on a $\ln(k+1)-\ln(k) = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$.

   Puisque $-\frac{1}{k} > -1$, on a $\ln(k)-\ln(k-1) = -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \geqslant \frac{1}{k}$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On a :
$$\sum_{k=2}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n}(\ln(k)-\ln(k-1))$$
   On reconnait des sommes télescopiques :
$$\ln(n+1)-\ln(2) \leqslant -1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \ln(n).$$
   Ainsi
$$\frac{1-\ln(2)+\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)}H_n \leqslant 1+\frac{1}{\ln(n)}.$$
   On a $\frac{1-\ln(2)+\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{1-\ln(2)+\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1+\frac{1-\ln(2)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$. Par encadrement, nous en déduisons que $\frac{1}{\ln(n)}H_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$, c'est-à-dire $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exercice 16. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.
2) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et si $a < b$, alors $u_n^a \underset{+\infty}{=} o(u_n^b)$.
3) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et si $0 < a < b$, alors $a^{u_n} \underset{+\infty}{=} o(b^{u_n})$.
4) $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Correction :

1) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on a $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. C'est-à-dire $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.
2) Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $a-b<0$, on a $\frac{u_n^a}{u_n^b} = u_n^{a-b} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $u_n^a \underset{+\infty}{=} o(u_n^b)$.

3) Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et comme $0 < \dfrac{a}{b} < 1$, alors $\dfrac{a^{u_n}}{b^{u_n}} = \exp\left(u_n \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est-à-dire $a^{u_n} \underset{+\infty}{=} o(b^{u_n})$.

4) Si $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$ alors $e^{u_n - v_n} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Puisque $\ln$ est continue en 1, on obtient que $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$. Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ alors, puisque $\exp$ est continue en 0, on obtient que $\dfrac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{u_n - v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$, c'est-à-dire $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$.

Exercice 17. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs telles que $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+\backslash\{1\}$ ou $+\infty$. Montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(u_n)$.

Correction : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+\backslash\{1\}$ ou $+\infty$. Il s'ensuit que, pour n assez grand, $u_n \neq 1$ et donc $\ln(u_n) \neq 0$. Ainsi

$$\frac{\ln(v_n)}{\ln(u_n)} = \frac{\ln\left(u_n \cdot \dfrac{v_n}{u_n}\right)}{\ln(u_n)} = \frac{\ln(u_n) + \ln\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)}{\ln(u_n)} = 1 + \frac{\ln\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)}{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

puisque $\ln\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$ et $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite non nulle ou $\pm\infty$. Ainsi $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(u_n)$.

Exercice 18.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ que l'on notera x_n.

2) Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'elle tend vers $+\infty$.

3) Montrer que $\ln(x_n) \underset{+\infty}{=} o(x_n)$ et déterminer un équivalent simple de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4) Montrer que $y_n = x_n - n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5) Montrer que $x_n \underset{+\infty}{=} n - \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.

   On parle de développement asymptotique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Correction : Toutes les questions ont été traitées en cours sauf la cinquième. Allons-y : il s'agit de montrer que $y_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$. C'est un peu technique... On a

$$y_n = -\ln(x_n) + \ln(n) = -\ln(y_n + n - \ln(n)) + \ln(n) = -\ln\left(1 + \frac{y_n - \ln(n)}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{y_n - \ln(n)}{n}$$

puisque $\dfrac{y_n - \ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi

$$\frac{ny_n}{\ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} 1 - \frac{y_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On a donc $y_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$ donc $y_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ et donc $x_n \underset{+\infty}{=} n - \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$
