Correction de quelques exercices de la feuille de TD 18

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x=y\}$.
2) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x\leqslant y\}$.
3) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x=1+2y\}$.
4) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$.
5) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2=0\}$.
6) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2-y^2=0\}$.
7) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,5x+2z=0\}$.
8) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\begin{array}{c} x-y+z=0\\ \text{et } 2x-y=0\end{array}\right\}$.
9) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,(x-y)^2=2x+y\}$.
10) $\{(x-y,2x+y,y)\,|\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.
11) $\mathbb{Z}^2=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
12) $\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathfrak{Re}(z)=1\}$.
13) L'ensemble des suites réelles bornées.
14) L'ensemble des suites réelles croissantes.
15) L'ensemble des suites monotones.
16) L'ensemble des suites géométriques.
17) L'ensemble des suites arithmétiques.
18) L'ensemble $E_{a,b}$ des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de paramètres a et b, où $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.
19) L'ensemble des suites qui convergent vers -1.
20) $\{P\in\mathbb{K}[X]\,|\,\deg(P)=n\}$, pour $n\in\mathbb{N}$.
21) $\{P\in\mathbb{K}[X]\,|\,A$ divise $P\}$, pour $A\in\mathbb{K}[X]$.
22) $\{P\in\mathbb{K}[X]\,|\,0$ est racine $P\}$.
23) $\{P\in\mathbb{K}[X]\,|\,0$ est racine double de $P\}$.
24) L'ensemble des fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui s'annulent.
25) L'ensemble des fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$, où $T>0$.
26) L'ensemble des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$.
27) L'ensemble des fonctions affines.
28) L'ensemble des bijections de $[a,b]$ sur $\mathbb{R}$.
29) L'ensemble des fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que $f(a)=f'(a)=0$,
30) $\{M\in\mathcal{M}_n(K)\,|\,M^2=M\}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
31) $\left\{f\in C^0([a,b],\mathbb{R})\,\middle|\,\int_a^b f(t)\,dt=0\right\}$ pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$.

Correction : La plupart ont été traitées en cours.

10) Posons $F=\{(x-y,2x+y,y)\,|\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$. Puisque $(0-0,2\cdot 0+0,0)\in F$, on a $F\neq\varnothing$.

Ensuite, donnons-nous $(x-y,2x+y,y)\in F$, $(x'-y',2x'+y',y')\in F$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\lambda(x-y,2x+y,y)+\mu(x'-y',2x'+y',y')=(X-Y,2X+Y,Y)\in F$$

avec $X=\lambda x+\mu x'\in R$ et $Y=\lambda y+\mu y'\in\mathbb{R}$. Ainsi F est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

16) Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites géométriques de terme initial 1 et de raisons respectives 1 et 2. On a

$$\frac{u_1+v_1}{u_0+v_0}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}\neq\frac{5}{3}=\frac{1+4}{1+2}=\frac{u_2+v_2}{u_1+v_1}.$$

Ainsi $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas géométrique. Ainsi ce n'est pas un espace vectoriel.

18) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Rappelons que $E_{a,b}$ est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$. Tout d'abord il contient la suite nulle (il suffit de considérer $u_0=u_1=0$). Ensuite, donnons-nous $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $E_{a,b}$ et soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2}=\lambda(au_{n+1}+bu_n)+\mu(av_{n+1}+bv_n)=a(\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1})+b(\lambda u_n+\mu v_n),$$

si bien que $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}}+\mu(v_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\lambda u_n+\mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E_{a,b}$. Il s'agit donc bien d'un sous-espace vectoriel.

26) L'ensemble des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ n'est pas un espace vectoriel. En effet considérons les fonctions $\sin$ (qui est 2π-périodique) et $\phi : x\longmapsto\sin(2\pi x)$ (qui est 1-périodique). Montrons que $\sin+\phi$ n'est pas périodique. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $T>0$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(\sin+\phi)(x+T)=(\sin+\phi)(x)$. On en déduit que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\sin(x)-\sin(x+T)=\phi(x+T)-\phi(x)=\sin(2\pi x+2\pi T)-\sin(2\pi x)$$

donc

$$2\cos\left(x+\frac{T}{2}\right)\sin\left(-\frac{T}{2}\right)=2\cos\left(2\pi x+\pi T\right)\sin\left(\pi T\right).$$

- Si il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $T=2k\pi$, alors $0=2\cos(2\pi x+2k\pi^2)\sin(2k\pi^2)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. C'est absurde.
- Sinon on en déduit que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos\left(x+\dfrac{T}{2}\right)=-\dfrac{2\cos\left(2\pi x+\pi T\right)\sin\left(\pi T\right)}{\sin\left(T/2\right)}$ et donc

$$\cos\left(x\right)=-\frac{2\cos\left(\pi x\right)\sin\left(\pi T\right)}{\sin\left(T/2\right)}.$$

C'est absurde, car cela signifierait que $\cos$ est 1-périodique.

27) La fonction nulle est affine. Ensuite, donnons-nous f et g deux fonctions affines (à valeurs dans $\mathbb{R}$) et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Par définition, il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$ et $g(x)=cx+d$. Ainsi

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad (\lambda f+\mu g)(x)=\lambda f(x)+\mu g(x)=\lambda(ax+b)+\mu(cx+d)=(\lambda a+\mu c)x+(\lambda b+\mu d).$$

Ainsi $\lambda f+\mu g$ est affine. L'ensemble des fonctions affines est donc un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

28) La fonction nulle sur $[a,b]$ n'est pas bijective donc ce n'est pas un espace vectoriel.

29) Notns E l'ensemble en question. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. Si f désigne la fonction nulle, alors elle est dérivable sur $[a,b]$ et $f(a)=f'(a)=0$. Ensuite, donnons-nous f et g dans E, c'est-à-dire f et g sont deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que $f(a)=f'(a)=0=g'(a)=g'(a)$. Donnons-nous $\lambda\in\mathbb{R}$. On a $f+g$ dérivable sur $[a,b]$ et

$$(f+g)(a)=f(a)+g(a)=0+0=0\qquad\text{et}\qquad (f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)=0+0=0.$$

On a aussi λf dérivable sur $[a,b]$ et

$$(\lambda f)(a)=\lambda f(a)=0\qquad\text{et}\qquad(\lambda f)'(a)=\lambda f'(a)=0.$$

Ainsi il s'agit d'un s.e.v de $D^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit F et G deux s.e.v de E. Montrer que si $F\cup G$ est un s.e.v de E, alors $F\subset G$ ou $G\subset F$. *Autrement dit l'union de deux s.e.v est un s.e.v si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.*

Correction : Par l'absurde. Supposons que $F\not\subset G$ et $G\not\subset F$. Il existe alors $x\in F$ et $y\in G$ tels que $x\notin G$ et $y\notin F$. Ainsi $x\in F\cup G$, $y\in F\cup G$ et, puisque $F\cup G$ est un e.v, $x+y\in F\cup G$. Nous en déduisons que $x+y\in F$ ou $x+y\in G$. Supposons par exemple que $x+y\in F$. Dans ce cas $y=(x+y)-x\in F$, ce qui est absurde. Ainsi $F\subset G$ ou $G\subset F$.

Exercice 3. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Soient $(P_1,\dots,P_k)$ une famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ tels que $\deg(P_1)<\deg(P_2)<\cdots<\deg(P_k)$. Montrer qu'il s'agit d'une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Correction : Vu en proposition dans le cours.

Exercice 4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\big(x\mapsto 1,\, x\mapsto e^x,\, x\mapsto e^{2x},\,\dots,\, x\mapsto e^{nx}\big)$ est une famille libre dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Correction : Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, notons $f_k : x\longmapsto e^{kx}$. Les vecteurs de la famille $\big(f_0,\dots,f_n\big)$ appartiennent bien à $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Soit $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f_k=0$. On a alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k e^{kx}=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f_k(x)=0.$$

Si on pose $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$, alors on a $P(e^x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\exp$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, cela revient à dire que P s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$, qui est infini. Ainsi P est le polynôme nul et donc $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Ainsi la famille $\left(x \mapsto 1,\, x \mapsto e^x,\, x \mapsto e^{2x},\, \ldots,\, x \mapsto e^{nx}\right)$ est libre .

Exercice 5. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$, $v_n = n$, $w_n = 2^n$ et $x_n = 3^n$. Montrer que (u, v, w, x) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Correction :Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha u + \beta v + \gamma w + \delta x = 0$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha + \beta n + \gamma 2^n + \delta 3^n = \alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n + \delta x_n = (\alpha u + \beta v + \gamma w + \delta x)_n = 0$.

Évaluons en plusieurs valeurs de n :

- Si $n = 0$, $\alpha + \gamma + \delta = 0$,
- Si $n = 1$, $\alpha + \beta + 2\gamma + 3\delta = 0$,
- Si $n = 2$, $\alpha + 2\beta + 4\gamma + 9\delta = 0$,
- Si $n = 3$, $\alpha + 3\beta + 8\gamma + 27\delta = 0$.

Or nous avons

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma + 3\delta = 0 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma + 9\delta = 0 \\ \alpha + 3\beta + 8\gamma + 27\delta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \gamma + \delta = 0 & \\ \beta + \gamma + 2\delta = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2\beta + 3\gamma + 8\delta = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 3\beta + 7\gamma + 26\delta = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \gamma + \delta = 0 & \\ \beta + \gamma + 2\delta = 0 & \\ \gamma + 4\delta = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ 4\gamma + 20\delta = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \gamma + \delta = 0 & \\ \beta + \gamma + 2\delta = 0 & \\ \gamma + 4\delta = 0 & \\ 4\delta = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - 4L_3 \end{cases}$$

Par remontées successives, on trouve $\delta = 0$, puis $\gamma = 0$, puis $\beta = 0$ et $\alpha = 0$.

Ainsi (u, v, w, x) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 8. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Les familles $(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_n - x_1)$ et $(x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_n)$ sont-elles encore libres ?

Correction :

- On remarque que, par télescopage,
$$x_n - x_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1}).$$
Ainsi le dernier vecteur de la famille est combinaison linéaire des $n - 1$ premiers. Il s'ensuit que la famile est liée.
- La famille $(x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \cdots + x_n)$ est de cardinal n. On se donne donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ des scalaires tels que
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2(x_1 + x_2) + \cdots + \lambda_n(x_1 + \cdots + x_n) = 0.$$
On a donc
$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x_1 + (\lambda_2 + \cdots + \lambda_n)x_2 + \cdots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)x_{n-1} + \lambda_n x_n = 0.$$

Puisque $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on en déduit que

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \cdots = \lambda_{n-1} + \lambda_n = \lambda_n = 0.$$

Par remontées successives, on trouve $\lambda_n = 0$, puis $\lambda_{n-1} = 0$ etc. puis $\lambda_2 = 0$ et enfin $\lambda_1 = 0$. La famille est donc libre.

Exercice 9. Montrer que les seuls sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites vectorielles (c'est-à-dire les sous-espaces $\{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $u \in \mathbb{R}^2$).

Correction : Soit F un s.e.v de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas $\{(0,0)\}$. Il existe alors $(a,b) \in F \backslash \{(0,0)\}$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \cdot (a,b) \in F$ car F est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$. Ainsi la droite vectorielle $D = \{\lambda \cdot (a,b) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est incluse dans F.

- Ou bien $F = D$.
- Ou bien D est strictement incluse dans F. Dans ce cas, il existe $(c,d) \in F \backslash D$. Montrons qu'alors $F = \mathbb{R}^2$. Il suffit de montrer que tout élément de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de (a,b) et (c,d) (et donc est un élément de F). Donnons-nous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x,y) = \alpha(a,b) + \beta(c,d)$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Mais puisque (a,b) et (c,d) ne sont pas colinéaires, on a $ad - bc \neq 0$ et donc la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible. Il suffit alors de prendre (α, β) tels que $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ainsi on a bien montré que $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Vect}((a,b),(c,d)) \subset F$ et donc $F = \mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une famille génératrice simple.

1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$.
2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 7z = y\}$.
3) $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{c} x - y + z = 0 \\ \text{et } 2x - y = 0 \end{array} \right\}$.
4) $\{(z, x - y + z, 2x) \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$.
5) $\{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(2) = 0\}$.
6) $\{P \in \mathbb{C}_2[X] \mid P(1 - X) = P(X)\}$.
7) $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geqslant 4,\ u_n = 0\}$.

Correction : Nous avons traité les six premiers points. Occupons-nous du dernier.
Notons $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geqslant 4,\ u_n = 0\}$ et posons

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $a_n = 0$.
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $b_n = 0$.
- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $c_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{2\}$, $c_n = 0$.
- $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $d_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{3\}$, $d_n = 0$.

Ces quatre suites appartiennent à F et, pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, on a

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = u_0 \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + u_1 \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + u_2 \cdot (c_n)_{n\in\mathbb{N}} + u_3 \cdot (d_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Ainsi $F = \mathrm{Vect}\left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une base de l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Même question pour l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques.

Correction : Avant de commencer, traitons le cas particulier où $n = 3$ pour bien comprendre. Si $M \in \mathcal{S}_3(\mathbb{K})$, alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma, a, b, c) \in \mathbb{K}^6$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & a & b \\ a & \beta & c \\ b & c & \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $M = \alpha E_{1,1} + \beta E_{2,2} + \gamma E_{3,3} + a(E_{1,2} + E_{2,1}) + b(E_{1,3} + E_{3,1}) + c(E_{2,3} + E_{3,2})$. La famille

$$(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{1,3} + E_{3,1}, E_{2,3} + E_{3,2})$$

est donc génératrice de $\mathcal{S}_3(\mathbb{K})$. On montre facilement qu'elle est libre.

Si $M \in \mathcal{A}_3(\mathbb{K})$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{K}^6$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $M = a(E_{1,2} - E_{2,1}) + b(E_{1,3} - E_{3,1}) + c(E_{2,3} - E_{3,2})$. La famille

$$(E_{1,2} - E_{2,1}, E_{1,3} - E_{3,1}, E_{2,3} - E_{3,2})$$

est donc génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{K})$. On montre facilement qu'elle est libre.

Traitons le cas général. Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}E_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_{i,j}E_{i,j} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_{j,i}E_{j,i}.$$

- Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{j,i} = m_{i,j}$. Ainsi

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_{i,j}\big(E_{i,j} + E_{j,i}\big).$$

  Ainsi la famille $\Big((E_{i,i}, 1 \leqslant i \leqslant n), (E_{i,j} + E_{j,i}, 1 \leqslant i < j \leqslant n)\Big)$ est génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

- Si $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{j,i} = -m_{i,j}$. En particulier, $m_{i,i} = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi

$$M = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} m_{i,j}\big(E_{i,j} - E_{j,i}\big).$$

  Ainsi la famille $\Big(E_{i,j} - E_{j,i}, 1 \leqslant i < j \leqslant n\Big)$ est génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 13. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1) $\mathrm{Vect}\big((3, 1, -7), (4, -2, -8), (-3, 4, 5)\big)$ dans $\mathbb{R}^3$,
2) $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + 2y + 3z - t = 0\}$ dans $\mathbb{R}^4$,
3) $\{P \in \mathbb{R}_5[X] \,|\, P(1) = P'(1) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_5[X]$.

Correction : Nous avons traité les deux derniers points en TD. Faisons la premier : par définition la famille $\big((3, 1, -7), (4, -2, -8), (-3, 4, 5)\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}\big((3, 1, -7), (4, -2, -8), (-3, 4, 5)\big)$. Ensuite donnons-nous $(\lambda, \mu, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(0, 0, 0) = \lambda(3, 1, -7) + \mu(4, -2, -8) + \gamma(-3, 4, 5)$. Ainsi

$$\begin{cases} 3\lambda + 4\mu - 3\gamma = 0 \\ \lambda - 2\mu + 4\gamma = 0 \\ -7\lambda - 8\mu + 5\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\lambda + 4\mu - 3\gamma = 0 \\ \quad - 10\mu + 15\gamma = 0 & L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ \quad 4\mu - 6\gamma = 0 & L_3 \leftarrow 3L_3 + 7L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3\lambda + 4\mu - 3\gamma = 0 \\ \quad - 10\mu + 15\gamma = 0 \\ \quad 0 = 0 & L_3 \leftarrow 5L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = -\gamma \\ \mu = \dfrac{3}{2}\gamma \end{cases}$$

Ainsi (en prenant $\gamma = 2$), on a $(0,0,0) = -2(3,1,-7) + 3(4,-2,-8) + 2(-3,4,5)$. La famille $\big((3,1,-7),(4,-2,-8),(-3,4,5)\big)$ n'est donc pas libre. Puisque chaque vecteur e la famille est combinaison linéaire des deux autres, on peut en enlever un :

$$\mathrm{Vect}\big((3,1,-7),(4,-2,-8),(-3,4,5)\big) = \mathrm{Vect}\big((4,-2,-8),(-3,4,5)\big).$$

On vérifie aisément (en enlevant le γ du système précédent) que la famille $\big((4,-2,-8),(-3,4,5)\big)$ est libre et donc qu'il s'agit d'une base de $\mathrm{Vect}\big((3,1,-7),(4,-2,-8),(-3,4,5)\big)$.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner des bases de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vu comme des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Correction :

- Soit $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$. On a

$$\begin{aligned} u = (u_1,\dots,u_n) &= \big(\mathfrak{Re}(u_1) + i\,\mathfrak{Im}(u_1), \dots, \mathfrak{Re}(u_n) + i\,\mathfrak{Im}(u_n)\big) \\ &= \mathfrak{Re}(u_1)(1,0,\dots,0) + \cdots + \mathfrak{Im}(u_1)(i,0,\dots,0) \\ &\quad + \mathfrak{Re}(u_2)(0,1,\dots,0) + \cdots + \mathfrak{Im}(u_2)(0,i,\dots,0) \\ &\quad\quad + \cdots + \mathfrak{Re}(u_n)(0,0,\dots,1) + \cdots + \mathfrak{Im}(u_n)(0,0,\dots,i). \end{aligned}$$

  Notons $e_i = (0,\dots,0,i,0,\dots,0)$ (le i étant à la $i^{\text{ème}}$ place) pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. On en déduit que la famille
$$(e_1, ie_1, e_2, ie_2, \dots, e_n, ie_n)$$
  est génératrice. Montrons qu'elle est libre : donnons-nous $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n$ des **réels** tels que
$$\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k + \sum_{k=1}^n \beta_k i e_k = (0,\dots,0).$$
  On a alors
$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k)e_k = (0,\dots,0)$$
  et donc $\alpha_1 + i\beta_1 = \cdots = \alpha_n + i\beta_n$. Finalement $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$. La famille est donc libre : c'est une base.
- Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Il existe $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que
$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^n (\mathfrak{Re}(a_k) + i\,\mathfrak{Im}(a_k))X^k = \sum_{k=0}^n \mathfrak{Re}(a_k)X^k + \sum_{k=0}^n \mathfrak{Im}(a_k)\, iX^k.$$
  On en déduit que la famille
$$(1, i, X, iX, X^2, iX^2, \dots, X^n, iX^n)$$
  est génératrice. Montrons qu'elle est libre : donnons-nous $\alpha_0,\dots,\alpha_n,\beta_0,\dots,\beta_n$ des **réels** tels que
$$\sum_{k=0}^n \alpha_k X^k + \sum_{k=0}^n \beta_k i X^k = 0.$$
  On a alors
$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k)X^k = 0$$
  et donc $\alpha_0 + i\beta_0 = \cdots = \alpha_n + i\beta_n$. Finalement $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = \beta_0 = \cdots = \beta_n = 0$. La famille est donc libre : c'est une base.
- On montre de même que la famille $(E_{k,\ell}, iE_{k,\ell}, 1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
