Correction de quelques exercices de la feuille de TD 17

Exercice 1. Calculer $A+B$, $A-2B$, AB et BA (si c'est possible) lorsque

1) $A=\begin{pmatrix}3&0&2&1\\-1&-5&0&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}8&2\\-1&3\end{pmatrix}$,

2) $A=\begin{pmatrix}-3&0&8\\1&5&-4\\-1&2&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4&0&0\\-7&-2&0\\1&-3&3\end{pmatrix}$,

3) $A=\begin{pmatrix}i&2+3i\\1+i&-4i\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1&7i\\4-5i&-i\end{pmatrix}$,

4) $A=\begin{pmatrix}-3&2&1&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&0\\3&5\\0&-4\end{pmatrix}$,

5) $A=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{17}{5}&\frac{2}{3}\\0&\frac{4}{11}&1\\\frac{1}{5}&-\frac{2}{13}&\frac{5}{4}\\2&\frac{5}{12}&-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

Correction :

1) $A+B$, $A-2B$ et AB ne sont pas définies et $BA=\begin{pmatrix}22&-10&16&16\\-6&-15&-2&11\end{pmatrix}$.

2) $A+B=\begin{pmatrix}1&0&8\\-6&3&-4\\0&-1&3\end{pmatrix}$, $A-2B=\begin{pmatrix}-11&0&8\\15&9&-4\\-3&8&-6\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}-4&-24&24\\-35&2&-12\\-18&-4&0\end{pmatrix}$ et

$BA=\begin{pmatrix}-12&0&32\\19&-10&-48\\-9&-9&20\end{pmatrix}$.

3) $A+B=\begin{pmatrix}-1+i&2+10i\\5-4i&-5i\end{pmatrix}$, $A-2B=\begin{pmatrix}2+i&2-11i\\-7+11i&-2i\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}23+i&-4-2i\\-21-17i&-11+7i\end{pmatrix}$

et $BA=\begin{pmatrix}-7+6i&26-3i\\6+3i&19+2i\end{pmatrix}$.

4) $A+B$, $A-2B$ et BA ne sont pas définies et $AB=\begin{pmatrix}-5&-5\end{pmatrix}$.

5) $A+B$, $A-2B$ et AB ne sont pas définies et $BA=\begin{pmatrix}-\frac{11}{6}\\-2\\-\frac{23}{10}\\\frac{7}{2}\end{pmatrix}$.

Exercice 2. Calculer la transposée des matrices $A=\begin{pmatrix}\pi&1&2&-1&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&8\\0&3\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}2&i&1&-i\\0&-3&0&6\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0&2&-3\\2&12&1\\-3&1&-1\end{pmatrix}$, et $E=\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\3&0&3&-4\\5&-6&5&0\end{pmatrix}$.

Correction :

$${}^tA=\begin{pmatrix}\pi\\1\\2\\-1\\7\end{pmatrix},\quad {}^tB=\begin{pmatrix}-1&0\\8&3\end{pmatrix},\quad {}^tC=\begin{pmatrix}2&0\\i&-3\\1&0\\-i&6\end{pmatrix},\quad {}^tD=D,\quad {}^tE=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&0&-6\\-1&3&5\\2&-4&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, notons $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice (i,j) qui est égal à 1. Calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$ pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$.

Correction : Soit $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$. Soit $(x,y) \in [\![1,n]\!]^2$. Calculons le coefficient d'indice (x,y) de $E_{i,j}E_{k,\ell}$. On a

$$\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{x,y} = \sum_{z=1}^{n} \left(E_{i,j}\right)_{x,z}\left(E_{k,\ell}\right)_{z,y}.$$

- Si $x \neq i$ alors, pour tout $z \in [\![1,n]\!]$, $\left(E_{i,j}\right)_{x,z} = 0$. Nous en déduisons que $\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{x,y} = 0$.
- Si $x = i$ alors, pour tout $z \in [\![1,n]\!]$, $\left(E_{i,j}\right)_{x,z} = \left(E_{i,j}\right)_{i,z} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z = j \\ 0 & \text{si} \quad z \neq j \end{cases}$

  Ainsi $\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{i,y} = 0 + \cdots + 1 \cdot \left(E_{k,\ell}\right)_{j,y} + \cdots + 0 = \left(E_{k,\ell}\right)_{j,y}$. Nous en déduisons que

  — Si $k = j$, alors $\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{i,y} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y = \ell \\ 0 & \text{si} \quad y \neq \ell \end{cases}$.

  — Si $k \neq j$, alors $\left(E_{i,j}E_{k,\ell}\right)_{i,y} = 0$.

Finalement

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si} \quad j = k \\ \mathrm{O}_n & \text{si} \quad j \neq k \end{cases}$$

Exercice 6. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_n & 1-2x_n & 2x_n \\ x_n & -x_n & x_n+1 \end{pmatrix}$.
2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3) En déduire l'expression de M^n en fonction de n.

Correction :

1) Raisonnons par récurrence. Pour commencer on remarque que, si $x_0 = 3$, alors

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_0 & 1-2x_0 & 2x_0 \\ x_0 & -x_0 & x_0+1 \end{pmatrix}.$$

   Supposons que la propriété soit vraie au rang n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On calcule alors que

$$M^{n+1} = M^nM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_n & 1-2x_n & 2x_n \\ x_n & -x_n & x_n+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6-4x_n & -5+4x_n & 6-4x_n \\ 3-2x_n & 2x_n-3 & 4-2x_n \end{pmatrix}.$$

   Si on pose $x_{n+1} = 3 - 2x_n$, on obtient que

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_{n+1} & 1-2x_{n+1} & 2x_{n+1} \\ x_{n+1} & -x_{n+1} & x_{n+1}+1 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$. Par récurrence elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) On a $x_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 3-2x_n$. Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3) On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = 3 - 2x$. On trouve $x = 1$. On montre ensuite que $(x_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2 et on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = 1 + (-2)^n(x_n - 1) = 1 - (-2)^{n+1}$$

   et donc

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2+(-2)^{n+2} & -1-(-2)^{n+2} & 2+(-2)^{n+2} \\ 1-(-2)^{n+1} & (-2)^{n+1}-1 & 2-(-2)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer M_α^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction : C'est ultra classique. On écrit que $M_\alpha = (\alpha - 1)\mathrm{I}_3 + J_3$, où J_3 est la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a vu en cours que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_3^n = 3^{n-1}J_3$ (formule fausse bien entendu pour $n = 0$).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $(\alpha - 1)\mathrm{I}_3$ et J_3 commutent, la formule du binôme de Newton, entraîne que

$$M_\alpha^n = \big((\alpha-1)\mathrm{I}_3 + J_3\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J_3^k((\alpha-1)\mathrm{I}_3)^{n-k} = (\alpha-1)^n\mathrm{I}_3 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{k-1}J_3(\alpha-1)^{n-k}\mathrm{I}_3.$$

On "sort" de la somme tout ce qui ne dépend pas de k et on reconnait la formule du binôme de Newton (pour les réels cette fois) :

$$M_\alpha^n = (\alpha-1)^n\mathrm{I}_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^k(\alpha-1)^{n-k}\right)\mathrm{J}_3 = (\alpha-1)^n\mathrm{I}_3 + \frac{(3+\alpha-1)^n - (\alpha-1)^n}{3}\mathrm{J}_3.$$

Exercice 12. En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, calculer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Correction :

$$(A|\mathrm{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 4L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -20 & 10 & 0 & -16 & 24 & -18 \\ 0 & 30 & 0 & 24 & -36 & 42 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 5L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow 5L_2 + 7L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -60 & 0 & 0 & -72 & 108 & -96 \\ 0 & 30 & 0 & 24 & -36 & 42 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & -8 & 6 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2$$

D'où A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -9 & 8 \\ 4 & -6 & 7 \\ 7 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.

$$(B|\mathrm{I}_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -21 & 12 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 8L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$$

Ainsi B n'est pas inversible.

$$(C|\mathrm{I}_3)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}-1&1&3&-1&1&0&0&0\\4&3&4&-3&0&1&0&0\\-1&-2&-3&1&0&0&1&0\\3&2&3&-1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}-1&1&3&-1&1&0&0&0\\0&7&16&-7&4&1&0&0\\0&-3&-6&2&-1&0&1&0\\0&5&12&-4&3&0&0&1\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2+4L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\\L_4\leftarrow L_4+3L_1\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}-1&1&3&-1&1&0&0&0\\0&7&16&-7&4&1&0&0\\0&0&6&-7&5&3&7&0\\0&0&4&7&1&-5&0&7\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}L_3\leftarrow 7L_3+3L_2\\L_4\leftarrow 7L_4-5L_2\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}-1&1&3&-1&1&0&0&0\\0&7&16&-7&4&1&0&0\\0&0&6&-7&5&3&7&0\\0&0&0&35&-7&-21&-14&21\end{array}\right)\quad L_4\leftarrow 3L_4-2L_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}-35&35&105&0&28&-21&-14&21\\0&35&80&0&13&-16&-14&21\\0&0&30&0&18&-6&21&21\\0&0&0&35&-7&-21&-14&21\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}L_1\leftarrow 35L_1+L_4\\L_2\leftarrow 5L_2+L_4\\L_3\leftarrow 5L_3+L_4\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}-70&70&0&0&-70&0&-175&-105\\0&105&0&0&-105&0&-210&-105\\0&0&30&0&18&-6&21&21\\0&0&0&35&-7&-21&-14&21\end{array}\right)\quad\begin{array}{l}L_1\leftarrow 2L_1-7L_3\\L_2\leftarrow 3L_2-8L_3\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}-210&0&0&0&0&0&-105&-105\\0&105&0&0&-105&0&-210&-105\\0&0&30&0&18&-6&21&21\\0&0&0&35&-7&-21&-14&21\end{array}\right)\quad L_1\leftarrow 3L_1-2L_2$$

D'où C est inversible et $C^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1/2&1/2\\-1&0&-2&-1\\3/5&-1/5&7/10&7/10\\-1/5&-3/5&-2/5&3/5\end{pmatrix}$.

Exercice 14. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $u_0=1$, $v_0=-2$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad \begin{cases}u_{n+1}=-4u_n+v_n\\v_{n+1}=2u_n-3v_n\end{cases}$$

1) Posons $A=\begin{pmatrix}-4&1\\2&-3\end{pmatrix}$. Montrer que $P=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et calculer $P^{-1}AP$.
2) Calculer A^n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.
3) En déduire u_n et v_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

Correction :

1) La matrice P est inversible car son déterminant est $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{-1}{3}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$. De plus

$$P^{-1}=\frac{1}{1/3}\begin{pmatrix}1/3&1/3\\-2/3&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}.$$

On calcule alors que

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&1\\2&-3\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-2\\10&-5\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6&0\\0&-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-5\end{pmatrix}.$$

2) On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$. Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_{n+1} = AX_n.$$

Une récurrence immédiate montrer que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = A^nX_0 &= P\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix} -(-2)^n \\ -4(-5)^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4(-5)^n - (-2)^n \\ (-2)^{n+1} - 4(-5)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4(-5)^n - (-2)^n}{3}$ et $v_n = \dfrac{(-2)^{n+1} - 4(-5)^n}{3}$.

Exercice 16. Considérons $M = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $P = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de M.
2) Est-ce que M est inversible ?
3) Calculer M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1) On calcule que $M^2 = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -10 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ puis $M^3 = \begin{pmatrix} -3 & -14 & -13 \\ -1 & -4 & -4 \\ 2 & 10 & 9 \end{pmatrix}$ puis

$$M^3 - 2M^2 + M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de M.

2) Si M est inversible, alors $O_3 = M^{-1}O_3 = M^{-1}(M^3 - 2M^2 + M) = M^2 - 2M + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

C'est absurde : M est donc non inversible.

3) On a $M^3 = 2M^2 - M$ puis $M^4 = M^3M = 2M^3 - M^2 = 2(2M^2 - M) - M^2 = 3M^2 - 2M$ puis $M^5 = M^4M = 3M^3 - 2M^2 = 3(2M^2 - M) - 2M^2 = 4M^2 - 3M$. On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, $M^n = (n-1)M^2 - (n-2)M$.

La formule est vraie au rang 2. Supposons qu'elle est vraie au rang n pour un certain $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. On a alors

$$M^{n+1} = M^nM = ((n-1)M^2 - (n-2)M)M = (n-1)M^3 - (n-2)M^2 = (n-1)(2M^2 - M) - (n-2)M^2.$$

donc $M^{n+1} = (2n - 2 - n + 2)M^2 - (n-1)M = nM^2 - (n-1)M$. Elle est donc vraie au rang $n+1$. Ainsi, par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}, \qquad M^n = (n-1)M^2 - (n-2)M = (n-1)\begin{pmatrix} -3 & -8 & -10 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} - (n-2)\begin{pmatrix} -3 & -2 & -7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, posons

$$M_{i,j} = \mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}, \quad D_i(\alpha) = \mathrm{I}_n + (\alpha - 1)E_{i,i} \quad \text{et} \quad T_{i,j}(\alpha) = \mathrm{I}_n + \alpha E_{i,j}.$$

Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) En quoi consiste le produit $M_{i,j}A$? En déduire que $M_{i,j}$ est inversible et calculer $M_{i,j}^{-1}$.
2) En quoi consiste le produit $D_i(\alpha)A$? En déduire que $D_i(\alpha)$ est inversible et calculer $D_i(\alpha)^{-1}$.
3) En quoi consiste le produit $T_{i,j}(\alpha)A$? En déduire que $T_{i,j}(\alpha)$ est inversible et calculer $T_{i,j}(\alpha)^{-1}$.

Correction : Avant de commencer, demandons-nous à quoi est égale la matrice $E_{i,j}A$ lorsque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$(E_{i,j}A)_{k,\ell} = \sum_{x=1}^{n} (E_{i,j})_{k,x} a_{x,\ell} = (E_{i,j})_{k,j} a_{j,\ell} = \begin{cases} a_{j,\ell} & \text{si} \quad k = i \\ 0 & \text{si} \quad k \neq i \end{cases}.$$

Ainsi $E_{i,j}A$ est la matrice dont la $i^{\text{ième}}$ ligne est la $j^{\text{ième}}$ ligne de A, et dont tous les autres coefficients sont nuls.

1) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. La matrice $E_{i,i}A$ (resp. $E_{j,j}A$) est la matrice dont la $i^{\text{ième}}$ (resp. $j^{\text{ième}}$) ligne est la $i^{\text{ième}}$ (resp. $j^{\text{ième}}$) ligne de A, et dont tous les autres coefficients sont nuls. Ainsi la matrice $(\mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j})A$ est la matrice A dont on a transformé tous les coefficients des lignes i et j en 0. Nous en déduisons que $M_{i,j}A$ est la matrice A dont les lignes i et j ont été échangées.

   Or on sait que, si on effectue l'opération élémentaire $L_i \longleftrightarrow L_j$ sur les lignes d'une matrice, alors on revient à la matrice initiale en effectuant l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ à nouveau. Nous en déduisons que $M_{i,j}$ est inversible d'inverse $M_{i,j}$.

2) Soit $(i,\alpha) \in [\![1,n]\!] \times \mathbb{K}$. La matrice $(\mathrm{I}_n - E_{i,i})A$ est la matrice A dont on a transformé tous les coefficients de la ligne i en 0. La matrice $\alpha E_{i,i}A$ est la matrice dont la $i^{\text{ième}}$ ligne est la $i^{\text{ième}}$ ligne de A multipliée par α et dont tous les autres coefficients sont nuls. Ainsi $D_i(\alpha)A$ est la matrice A dont les coefficients de la $i^{\text{ième}}$ ligne ont été multipliés par α.

   Si $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et si on effectue l'opération élémentaire $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ sur les lignes d'une matrice, alors on revient à la matrice initiale en effectuant l'opération $L_i \longleftarrow \dfrac{1}{\alpha} L_i$ à nouveau. Nous en déduisons que $D_i(\alpha)$ est inversible d'inverse $D_i(1/\alpha)$.
   Si $\alpha = 0$, alors $D_i(0)$ n'est pas inversible (il s'agit d'une matrice diagonale dont un coefficient est nul).

3) Soit $(i,j,\alpha) \in [\![1,n]\!]^2 \times \mathbb{K}$. La matrice $T_{i,j}(\alpha)A$ est la matrice A dont on a ajouté α fois la $j^{\text{ième}}$ ligne à la $i^{\text{ième}}$ ligne.

   Or on sait que, si on effectue l'opération élémentaire $L_i \longleftarrow L_i + \alpha L_j$ sur les lignes d'une matrice, alors on revient à la matrice initiale en effectuant l'opération $L_i \longleftarrow L_i - \alpha L_j$ à nouveau. Nous en déduisons que $T_{i,j}(\alpha)$ est inversible d'inverse $T_{i,j}(-\alpha)$.