# Correction de quelques exercices de la feuille de TD 16

**Exercice 1.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

1) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{5y}{3} + \dfrac{3z}{2} = \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{4y}{3} - \dfrac{11z}{6} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3y - 4z = -7 \\ 5x + 2z = 4 \\ -2x - y = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 5z = 2 \\ x + y + z = 3 \\ + 4y - 6z = 8 \\ -x - 3y + 2z = -7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 1 \\ 3x - y - z - 2t = 0 \\ -5x + 6z + 4t = 1 \\ 2x - 4y + 8z = -1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + y - z = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{3} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x + 6y + z - 3t + 7u = -3 \\ 3x + 5y + z - 2u = 2 \\ 2x + 8y + 5z + 6t - 7u = 5 \\ -4x - 2y + 3z + 6t - 3u = 1 \\ -5x - y + 3z + 3t + 6u = -4 \end{cases}$

***Correction :***

1) Pour simplifier les calculs, on peut déjà commencer par multiplier chaque ligne par $6$. On obtient

$$(S) \iff \begin{cases} 6x + 3y - 3z = 15 \\ 2x + 10y + 9z = 14 \\ 2x - 8y - 11z = -3 \end{cases}$$

On applique ensuite la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} 6x + 3y - 3z = 15 & \\ 27y + 30z = 27 & L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ -27y - 30z = -24 & L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6x + 3y - 3z = 15 & \\ 27y + 30z = 27 & \\ 0 = 3 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

La dernière ligne étant fausse, on en déduit qu'il n'y a pas de solutions.

2) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} 5x + 2z = 4 & \\ 3y - 4z = -7 & \\ -5y + 4z = 23 & L_3 \leftarrow 5L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x + 2z = 4 & \\ 3y - 4z = -7 & \\ -8z = 34 & L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_2 \end{cases}$$

On obtient $z = -\dfrac{17}{4}$ puis $y = \dfrac{1}{3}(-7 + 4z) = -8$ et $x = \dfrac{1}{5}(4 - 2z) = \dfrac{5}{2}$.

3) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} 2x + 5z = 2 & \\ 2y - 3z = 4 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ 4y - 6z = 8 & \\ -6y + 9z = -12 & L_4 \leftarrow 2L_4 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 5z = 2 & \\ 2y - 3z = 4 & \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ 0 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes sont toujours vraies donc on peut les omettre. On obtient alors

$$(S) \iff \begin{cases} 2x + 5z = 2 \\ 2y - 3z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - \frac{5}{2}z \\ y = 2 + \frac{3}{2}z \end{cases}$$

où on a choisi par exemple que $z$ pour inconnue auxiliaire. L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \left(1, 2, 0\right) + z\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1\right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}$$

4) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} x - 2y + 4z = \\ 5y - 13z - 2t = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ -10y + 26z + 4t = 6 & L_3 \leftarrow L_3 + 5L_1 \\ 0 = -3 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases}$$

La dernière ligne étant fausse, on en déduit qu'il n'y a pas de solutions.

5) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} \frac{x}{5} + y - z = \frac{1}{3} \\ -7y + \frac{11}{3}z = -\frac{11}{3} & L_2 \leftarrow 4L_2 - 5L_1 \end{cases}$$

On décide que $z$ soit l'inconnu auxiliaire :

$$(S) \iff \begin{cases} x = 5\left(\frac{1}{3} - y + z\right) \\ y = \frac{11}{21}(1+z) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{10}{21}(-4+5z) \\ y = \frac{11}{21}(1+z) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{ \left(-\frac{40}{21}, \frac{11}{21}, 1\right) + z\left(\frac{50}{21}, \frac{11}{21}, 1\right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}$.

6) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} 2x + 6y + z - 3t + 7u = -3 \\ -8y - z + 9t - 25u = 13 & L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ 2y + 4z + 9t - 14u = 8 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 10y + 5z + 11u = -5 & L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1 \\ 28y + 11z - 9t + 47u = -23 & L_5 \leftarrow 2L_5 + 5L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 6y + z - 3t + 7u = -3 \\ -8y - z + 9t - 25u = 13 \\ 15z + 45t - 81u = 45 & L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2 \\ 15z + 45t - 81u = 45 & L_4 \leftarrow 4L_4 + 5L_2 \\ 15z + 45t - 81u = 45 & L_5 \leftarrow 2L_5 + 7L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 6y + z - 3t + 7u = -3 \\ -8y - z + 9t - 25u = 13 \\ 15z + 45t - 81u = 45 \\ 0 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \\ 0 = 0 & L_5 \leftarrow L_5 - L_3 \end{cases}$$

On peut omettre les deux dernières lignes qui sont toujours vraies. On choisit $t$ et $u$ pour inconnues auxiliaires. On obtient :

$$(S) \iff \begin{cases} 2x + 6y + z = -3 + 3t - 7u \\ -8y - z = 13 - 9t + 25u \\ 15z = 45 - 45t + 81u \end{cases}$$

Ainsi

$$(S) \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3}(-3+3t-7u-6y-z) \\ y = \frac{-1}{8}(13-9t+25u+z) \\ z = \frac{1}{5}(15-15t+27u) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2-4t+\frac{16}{3}u \\ y = -2+3t-\frac{19}{5}u \\ z = 3-3t+\frac{27}{5}u \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{\Big(2,-2,3\Big)+t\Big(-4,3,-3\Big)+u\Big(\frac{16}{3},-\frac{19}{5},\frac{27}{5}\Big)\;\Big|\;(t,u)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

**Exercice 2.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes linéaires suivants :

1) $\begin{cases} ix + 2y - z = -1 \\ 3x - 4iy = i \\ ix + 7y + 3iz = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -ix - y + z = 2-i \\ + (1+i)y + 2z = 1-i \\ x - iy + (1-i)z = 2 \\ x + (1-2i)y - iz = i \end{cases}$

***Correction :***

1) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} ix + 2y - z = -5+2i \\ 2iy - 3iz = 3-15i & L_2 \leftarrow L_2+3iL_1 \\ 5y + (1+3i)z = 8-i & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ix + 2y - z = -5+2i \\ 2iy - 3iz = 3-15i \\ (17i-6)z = -13+91i & L_3 \leftarrow 2iL_3 - 5L_2 \end{cases}$$

On obtient alors $z = \frac{-13+91i}{17i-6} = 5-i$ puis $y = \frac{-i}{2}(3+15i+3iz) = \frac{-i}{2}(3+15i+3iz) = -3i$ et enfin $x = -i(-5+2i-2y+z) = 7$. Il n'y a qu'une seule solution : le triplet $(7,-3i,5-i)$.

2) On applique la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \iff \begin{cases} -ix - y + z = 2-i \\ (1+i)y + 2z = 1-i \\ (2+i)z = 2+i & L_3 \leftarrow iL_3 + L_1 \\ (1+i)y + 2z = 1-i & L_4 \leftarrow iL_4 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -ix - y + z = 2-i \\ (1+i)y + 2z = 1-i \\ (2+i)z = 2+i \\ 0 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -ix - y + z = 2-i \\ (1+i)y + 2z = 1-i \\ (2+i)z = 2+i \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La dernière ligne étant toujours vraie, on peut l'omettre. On obtient alors $z = 1$ puis $y = \frac{1}{1+i}(1-i-2z) = -1$ et $x = i(2-i+y-z) = 1$. Il n'y a qu'une seule solution : le triplet $(1,-1,1)$.

**Exercice 4.** On cherche $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1,3\},\qquad \frac{5x^2+2x-1}{x^4-3x^3-x^2+3x}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x+1}+\frac{\delta}{x-3}.$$

Un tel quadruplet de réels existe-t-il ? Est-il unique ?

***Correction :*** Soient $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ et $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1,0,1,3\}$. On met le membre de droite sur le même dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x}+\frac{\gamma}{x+1}+\frac{\delta}{x-3}&=\frac{\alpha(x^3-2x^2-3x)+\beta(x^3-3x^2-x+3)+\gamma(x^3-4x^2+3x)+\delta(x^3-x)}{x^4-3x^3-x^2+3x}\\&=\frac{x^3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+x^2(-2\alpha-3\beta-4\gamma)+x(-3\alpha-\beta+3\gamma-\delta)+3\beta}{x^4-3x^3-x^2+3x}\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, le quadruplet $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ est solution si et seulement si il est solution du système

$$(S)\qquad\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\-2\alpha-3\beta-4\gamma=5\\-3\alpha-\beta+3\gamma-\delta=2\\3\beta=-1\end{cases}$$

Utilisons la méthode du Pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}(S)\quad&\iff\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\-\beta-2\gamma+2\delta=5 & L_2\leftarrow L_2+2L_1\\2\beta+6\gamma+2\delta=2 & L_3\leftarrow L_3+3L_1\\3\beta=-1\end{cases}\\&\iff\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\-\beta-2\gamma+2\delta=5\\2\gamma+6\delta=12 & L_3\leftarrow L_3+2L_2\\-6\gamma+6\delta=14 & L_4\leftarrow L_4+3L_2\end{cases}\\&\iff\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\delta=0\\-\beta-2\gamma+2\delta=5\\2\gamma+6\delta=12\\24\delta=50 & L_4\leftarrow L_4+3L_3\end{cases}\end{aligned}$$

On trouve une unique solution : $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{25}{12}\right)$.

**Exercice 5.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires à paramètres suivants :

1) $\begin{cases}mx+(2m-1)y=4m+1\\(5m+3)x+(m-1)y=5m-1\end{cases}$ avec $m\in\mathbb{R}$.

2) $\begin{cases}\rho x+y+z=\theta\\x+\rho y+z=\theta+1\\x+y+\rho z=\theta+2\end{cases}$ avec $(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2$.

3) $\begin{cases}x+2y-z=a\\-2x-3y+3z=b\\x+y-2z=c\end{cases}$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

4) $\begin{cases}-y+2z-4t=0\\-7x+6y-12z+3t=\mu\\7x-3y+6z+9t=-\mu\\-x+y-2z+t=1\end{cases}$ avec $\mu\in\mathbb{R}$.

5) $\begin{cases}\alpha x+\beta y+z=1\\x+\alpha\beta y+z=\beta\\x+\beta y+\alpha z=1\end{cases}$ avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

***Correction :***

5) Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$$(S) \iff \begin{cases} x + \beta y + \alpha z = 1 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x + \alpha\beta y + z = \beta \\ \alpha x + \beta y + z = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \beta y + \alpha z = 1 \\ \beta(\alpha-1)y + (1-\alpha)z = \beta - 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \beta(1-\alpha)y + (1-\alpha^2)z = 1-\alpha & L_3 \leftarrow L_3 - \alpha L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \beta y + \alpha z = 1 \\ \beta(\alpha-1)y + (1-\alpha)z = \beta - 1 \\ (1-\alpha)(2+\alpha)z = \beta-\alpha & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

- Premier cas : $\alpha = 1$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + \beta y + z = 1 \\ 0 = \beta - 1 \\ 0 = \beta - 1 \end{cases}$$

Si $\beta \neq 1$, il n'y a pas de solution. Si $\beta = 1$, alors

$$(S) \iff x = 1 - y - z.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{(1-y-z, y, z) \,|\, (y,z)\in\mathbb{R}^2\}$.

- Deuxième cas : $\alpha = -2$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + \beta y - 2z = 1 \\ -3\beta y + 3z = \beta - 1 \\ 0 = \beta + 2 \end{cases}$$

Si $\beta \neq -2$, alors il n'y a pas de solutions. Si $\beta = -2$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ 6y + 3z = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y = 1 + 2z \\ 2y = -1 - z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 + z \\ 2y = -1 - z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{(2+z, -(1+z)/2, z) \,|\, z\in\mathbb{R}\}$.

- Troisième cas : $\alpha \notin \{1,-2\}$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + \beta y + \alpha z = 1 \\ \beta(\alpha-1)y + (1-\alpha)z = \beta - 1 \\ z = \dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \beta y = 1 - \dfrac{\alpha(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \\ \beta(\alpha-1)y = \beta - 1 - \dfrac{\beta-\alpha}{2+\alpha} \\ z = \dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \end{cases}$$

Supposons que $\beta = 0$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x &= 1 + \dfrac{\alpha^2}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \\ 0 &= -1 + \dfrac{\alpha}{2+\alpha} \\ z &= -\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= 1 + \dfrac{\alpha^2}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \\ 0 &= -2-\alpha \\ z &= -\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \end{cases}$$

Il n'y a pas de solutions puisque la deuxième ligne est fausse (en effet on a supposé que $\alpha \neq -2$).

Si $\beta \neq 0$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} x + \beta y &= \dfrac{2-\alpha-\alpha\beta}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \\ y &= \dfrac{\beta - 2 + \beta\alpha}{\beta(\alpha-1)(2+\alpha)} \\ z &= \dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x &= \dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \\ y &= \dfrac{\beta - 2 + \beta\alpha}{\beta(\alpha-1)(2+\alpha)} \\ z &= \dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)} \end{cases}$$

Il y a donc une unique solution : $\left(\dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)}, \dfrac{\beta-2+\beta\alpha}{\beta(\alpha-1)(2+\alpha)}, \dfrac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(2+\alpha)}\right)$.