Correction de quelques exercices de la feuille de TD 14

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{1-4v}\,dv$,

2) $\displaystyle\int_{\ln(4)}^{\ln(2)} \left(3e^{-\frac{x}{4}}+1\right)^2 dx$,

3) $\displaystyle\int_1^2 e^u\left(\frac{1}{u}+\ln(u)\right)\,du$,

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{5}{\cos^2(3z)}\,dz$,

5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\cos^5(y)+4\cos^3(y)-7\right)\sin(y)\,dy$.

6) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{5+3t^2}\,dt$.

Correction : Toutes ont été calculées en cours sauf la deuxième. La fonction $x\longmapsto\left(3e^{-\frac{x}{4}}+1\right)^2$ est continue sur $[\ln(2),\ln(4)]$ donc l'intégrale a bien un sens. On développe :

$$\begin{aligned}
\int_{\ln(4)}^{\ln(2)} \left(3e^{-\frac{x}{4}}+1\right)^2 dx &= \int_{\ln(4)}^{\ln(2)} \left(9e^{-\frac{x}{2}}+6e^{-\frac{x}{4}}+1\right) dx \\
&= \left[-18e^{-\frac{x}{2}}-24e^{-\frac{x}{4}}+x\right]_{\ln(4)}^{\ln(2)} \\
&= -18e^{-\frac{\ln(2)}{2}}-24e^{-\frac{\ln(2)}{4}}+\ln(2)+18e^{-\frac{\ln(4)}{2}}+24e^{-\frac{\ln(4)}{4}}-\ln(4) \\
&= -\frac{18}{2^{1/2}}-\frac{24}{2^{1/4}}+\ln(2)+\frac{18}{4^{1/2}}+\frac{24}{4^{1/4}}-\ln(4) \\
&= 9+\frac{6}{\sqrt{2}}-\frac{24}{\sqrt[4]{2}}-\ln(2).
\end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. A l'aide de formules de trigonométrie, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1) $t\mapsto\cos(\alpha t)\cos(\beta t)$, 2) $t\mapsto\cos(\alpha t)\sin(\beta t)$, 3) $t\mapsto\sin(\alpha t)\sin(\beta t)$, 4) $t\mapsto\sin^4(t)$.

Correction : Supposons que $\alpha\neq 0$ et $\beta\neq 0$, sinon c'est immédiat.

1) Pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$\cos(\alpha t)\cos(\beta t)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}t\right)+\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}t\right)\right).$$
   - Si $\alpha\neq\beta$ et $\alpha\neq-\beta$, alors $t\longmapsto\dfrac{1}{\alpha+\beta}\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}t\right)+\dfrac{1}{\alpha-\beta}\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}t\right)$ est une primitive de $t\mapsto\cos(\alpha t)\cos(\beta t)$ sur $\mathbb{R}$.
   - Si $\alpha=\beta$ ou $\alpha=-\beta$, alors $t\longmapsto\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2\alpha}\sin(\alpha t)$ est une primitive de $t\mapsto\cos(\alpha t)\cos(\beta t)=\cos^2(\alpha t)$ sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$\cos(\alpha t)\sin(\beta t)=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}t\right)+\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}t\right)\right).$$
   - Si $\alpha\neq\beta$ et $\alpha\neq-\beta$, alors $t\longmapsto-\dfrac{1}{\alpha+\beta}\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}t\right)+\dfrac{1}{\alpha-\beta}\cos\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}t\right)$ est une primitive de $t\mapsto\cos(\alpha t)\sin(\beta t)$ sur $\mathbb{R}$.
   - Si $\alpha=\beta$, alors $t\longmapsto\dfrac{-1}{2\alpha}\cos(2\alpha t)$ est une primitive de $t\mapsto\cos(\alpha t)\sin(\beta t)=\dfrac{1}{2}\sin(2\alpha t)$ sur $\mathbb{R}$.

- Si $\alpha = -\beta$, alors $t \longmapsto \dfrac{1}{2\alpha}\cos(2\alpha t)$ est une primitive de $t \mapsto \cos(\alpha t)\sin(\beta t) = \dfrac{-1}{2}\sin(2\alpha t)$ sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\sin(\alpha t)\sin(\beta t) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\,t\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\,t\right)\right).$$

   - Si $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq -\beta$, alors $t \longmapsto \dfrac{1}{\alpha-\beta}\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\,t\right) - \dfrac{1}{\alpha+\beta}\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\,t\right)$ est une primitive de $t \mapsto \sin(\alpha t)\sin(\beta t)$ sur $\mathbb{R}$.
   - Si $\alpha = \beta$, alors $t \longmapsto \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{2\alpha}\sin(\alpha t)$ est une primitive de $t \mapsto \sin(\alpha t)\sin(\beta t) = \sin^2(\alpha t)$ sur $\mathbb{R}$.
   - Si $\alpha = -\beta$, alors $t \longmapsto -\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2\alpha}\sin(\alpha t)$ est une primitive de $t \mapsto \sin(\alpha t)\sin(\beta t) = -\sin^2(\alpha t)$ sur $\mathbb{R}$.

4) Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\sin^4(t) = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^4 &= \frac{1}{16}\left(e^{4it} - 4e^{2it} + 6 - 4e^{-2it} + e^{-4it}\right)\\ &= \frac{1}{16}\left(2\cos(4t) - 8\cos(2t) + 6\right)\\ &= \frac{1}{8}\cos(4t) - \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

   Donc $t \longmapsto \dfrac{1}{32}\sin(4t) - \dfrac{1}{4}\sin(2t) + \dfrac{3t}{8}$ est une primitive de $t \longmapsto \sin^4(t)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 – Primitives et décomposition en éléments simples.

1) Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3,0,3\}, \qquad \frac{9}{x(x^2-9)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x+3}.$$
   En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{9}{x(x^2-9)}$ (sur un intervalle à préciser).

2) Montrer qu'il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{ax+b}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2}.$$
   En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2}$ (sur un intervalle à préciser).

Correction :

1) Traitée en cours.

2) Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, on a
$$\begin{aligned}\frac{ax+b}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+2} &= \frac{ax+b+(cx+d)(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}\\ &= \frac{cx^3+dx^2+(a+2c+2d)x+b+2c+2d}{(x^2+2x+2)^2}\end{aligned}$$
   Ainsi (a,b,c,d) est solution si et seulement si $c=0$, $d=1$, $a+2c+2d=1$ et $b+2c+2d=1$. Ainsi $(a,b,c,d) = (-1,-1,0,1)$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-1}{2}\,\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2} + \frac{1}{1+(1+x)^2}.$$
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2}$ admet donc $x \longmapsto \dfrac{1}{2(x^2+2x+2)} + \mathrm{Arctan}(1+x)$ pour primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. A l'aide d'intégrations par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.

1) $x \mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$,
2) $x \mapsto \cos(\ln(x))$
(*On pourra faire deux IPP consécutives*),
3) $x \mapsto x^\alpha \ln(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$,
4) Arccos, la fonction réciproque de $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$.

Correction :

1) La fonction $t \longmapsto \dfrac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc y admet une primitive. Faisons une IPP avec les fonctions $u : t \longmapsto \sqrt{1+t^2}$ et $v : t \longmapsto t^2$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On a $u' : 2t \longmapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ et $v : t \longmapsto 2t$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^x \frac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \left[t^2\sqrt{1+t^2}\right]_0^x - \int_0^x 2t\sqrt{1+t^2}\,dt$$
$$= x^2\sqrt{1+x^2} - \left[\frac{2}{3}(1+t^2)^{3/2}\right]_0^x$$
$$= x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + \frac{2}{3}.$$
Ainsi une primitive de $t \longmapsto \dfrac{t^3}{\sqrt{1+t^2}}$ sur $\mathbb{R}$ est $t \longmapsto t^2\sqrt{1+t^2} - \dfrac{2}{3}(1+t^2)^{3/2}$.
2) Traitée en cours.
3) Traitée en cours.
4) On a vu dans la feuille de TD n° 13 que Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. En particulier Arccos est continue donc admet une primitive sur $]-1,1[$. Faisons une IPP avec les fonctions $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto \mathrm{Arccos}(t)$ de classe C^1 sur $]-1,1[$. On a $u' : t \longmapsto 1$ et $v' : t \longmapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,
$$\int_0^x \mathrm{Arccos}(t)\,dt = [t\,\mathrm{Arccos}(t)]_0^x - \int_0^x \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = x\,\mathrm{Arccos}(x) - \left[\sqrt{1-t^2}\right]_0^x$$
$$= x\,\mathrm{Arccos}(x) - \sqrt{1-x^2} + 1.$$
Ainsi une primitive de Arccos sur $]-1,1[$ est $t \longmapsto t\,\mathrm{Arccos}(t) - \sqrt{1-t^2}$.

Exercice 10. Calculer les intégrales suivantes :
$$1)\ \int_{-3}^4 \frac{|x-1|}{|x|+1}\,dx, \qquad 2)\ \int_{-1}^1 e^{-|u|}\,du, \qquad 3)\ \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))}\,dx, \qquad 4)\ \int_{4/e}^{2e} \frac{\lfloor y \rfloor}{y}\,dy.$$

Correction :

1) La fonction $x \longmapsto \dfrac{|x+1|}{|x|+1}$ est continue sur $[-3,4]$ donc l'intégrale a bien un sens. Son expression diffère selon l'intervalle considéré donc nous allons utiliser la relation de Chasles :
$$\int_{-3}^4 \frac{|x-1|}{|x|+1}\,dx = \int_{-3}^0 \frac{-(x-1)}{-x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{-(x-1)}{x+1}\,dx + \int_1^4 \frac{x-1}{x+1}\,dx = 3 + [F(x)]_0^1 - [F(x)]_1^4,$$
où F est une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ sur $[0,4]$. Pour tout $x \in [0,4]$, on a $f(x) = \dfrac{-1-x+2}{1+x} = -1 + \dfrac{2}{1+x}$ donc on peut considérer $F : x \longmapsto -x + 2\ln(1+x)$. Nous en déduisons que
$$\int_{-3}^4 \frac{|x-1|}{|x|+1}\,dx = 3 + 2F(1) - F(0) - F(4) = 5 + 4\ln(2) - 2\ln(5).$$

2) La fonction $u \longmapsto e^{-|u|}$ est continue et paire sur $[-1,1]$ donc

$$\int_{-1}^{1} e^{-|u|}\,du = 2\int_0^1 e^{-|u|}\,du = 2\int_0^1 e^{-u}\,du = 2(1-e^{-1}).$$

3) On remarque que la fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))}$ est impaire et continue sur $[-\pi/3,\pi/3]$ donc l'intégrale est nulle.

4) Traitée en cours.

Exercice 11. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Correction : Supposons que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt.$

- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$ et donc $\displaystyle\int_a^b (|f(t)|-f(t))\,dt = 0$. Puisque $a \leqslant b$ et $|f|-f$ est une fonction continue et positive sur $[a,b]$, nous obtenons qu'elle est nulle sur $[a,b]$, c'est-à-dire $f=|f|$, c'est-à-dire f est positive sur $[a,b]$.
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$ et donc $\displaystyle\int_a^b (|f(t)|+f(t))\,dt = 0$. Puisque $a \leqslant b$ et $|f|+f$ est une fonction continue et positive sur $[a,b]$, nous obtenons qu'elle est nulle sur $[a,b]$, c'est-à-dire $f=-|f|$, c'est-à-dire f est négative sur $[a,b]$.

Réciproquement si f ne change pas de signe sur $[a,b]$, alors l'égalité $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ est immédiate.

Exercice 12. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$. En utilisant le théorème de Rolle, montrer que f admet un point fixe.

Correction : Traitée en cours avec le groupe 1 seulement. On cherche une fonction dont la dérivée est $x \longmapsto f(x)-x$. Considère la fonction $\varphi : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - \frac{x^2}{2}$. Il s'agit d'une fonction continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ telle que $\varphi(0)=0$ et $\varphi(1) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2} = 0 = \varphi(0)$. Le théorème de Rolle entraîne qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $\varphi'(c)=0$. Ainsi $f(c)-c=0$ et donc c est un point fixe de f.

Exercice 15 – Lemme de Riemann Lebesgue. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = 0.$$

Correction : Faisons une IPP avec les fonctions $t \longmapsto \dfrac{\sin(nt)}{n}$ et f de classe C^1 sur $[a,b]$. On a :

$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = \left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\,dt = \frac{1}{n}\left(f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na) - \int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt\right).$$

Par inégalité triangulaire, on a

$$\left|\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\left(|f(b)\sin(nb)| + |f(a)\sin(na)| + \int_a^b |f'(t)\sin(nt)|\,dt\right).$$

Puisque $\sin$ est bornée par 1 sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$\left|\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{n}\underbrace{\left(|f(b)|+|f(a)|+\int_a^b |f'(t)|\,dt\right)}_{\text{terme indépendant de } n}.$$

Par encadrement, nous en déduisons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = 0.$

Exercice 16. Soit $T>0$. Soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $a\in\mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

Correction : Soit $a\in\mathbb{R}$. D'après la relation de Chasles

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_T^{a+T} f(t)\,dt.$$

En faisant le changement de variable de classe C^1 $x=t-T$ (avec « $dx=dt$ ») dans la dernière intégrale, on obtient

$$\int_T^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^a f(x+T)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^0 f(x)\,dx.$$

On retrouve alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$

Exercice 17 – Formules de la moyenne. Soient a et b deux réels tels que $a<b$.

1) Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et g une fonction continue et positive sur $[a,b]$.
   a) Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $f([a,b])=[m,M]$.
   b) Première formule de la moyenne : en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que
   $$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt.$$
   On traitera séparément le cas où l'intégrale de g entre a et b est nulle et le cas où elle est strictement positive.
2) Soit f une fonction positive, décroissante et de classe C^1 sur $[a,b]$. Soit g une fonction continue sur $[a,b]$. Posons $G : x\in[a,b]\longmapsto \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$.
   a) Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $G([a,b])=[m,M]$.
   b) Via une intégration par parties, montrer que $mf(a)\leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant Mf(a)$.
   c) Seconde formule de la moyenne : montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt$.

Correction :

1) a) f est continue sur $[a,b]$ donc le théorème des bornes atteintes entraîne que $f([a,b])$ est un segment : il existe deux réels m et M tels que $f([a,b])=[m,M]$.
   b) Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt=0$ alors, puisque g est positive sur $[a,b]$, nous en déduisons que g est nulle. La formule de la moyenne est donc vérifiée pour $c=a$ par exemple.

   Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt \neq 0$, alors posons $\mu = \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt}$. Puisque g est positive sur $[a,b]$, on a $mg(t)\leqslant f(t)g(t)\leqslant Mg(t)$ pour tout $t\in[a,b]$. Par positivité de croissance de l'intégrale, nous en déduisons que
   $$m\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant M\int_a^b g(t)\,dt$$

et donc $m \leqslant \mu \leqslant M$. Ainsi $\mu \in f([a,b])$ et donc il existe $c \in [a,b]$ tel que $\mu = f(c)$. D'où la formule de la moyenne.

2) a) G est continue (car c'est une primitive d'une fonction définie sur $[a,b]$) sur $[a,b]$ donc le théorème des bornes atteintes entraîne que $G([a,b])$ est un segment : il existe deux réels m et M tels que $G([a,b]) = [m,M]$.

b) Faisons une intégration par parties avec les fonctions G et f de classe C^1 (car $G' = g$ est continue) sur $[a,b]$. Comme $G(a) = 0$, on a :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = [G(t)f(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)G(t)\,dt = G(b)f(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\,dt$$

Puisque f' est négative sur $[a,b]$, on a $Mf'(t) \leqslant f'(t)G(t) \leqslant mf'(t)$ pour tout $t \in [a,b]$. Par propriété de croissance de l'intégrale, nous en déduisons que

$$M\big(f(b)-f(a)\big) = M\int_a^b f'(t)\,dt \leqslant \int_a^b f'(t)G(t)\,dt \leqslant m\int_a^b f'(t)\,dt = m\big(f(b)-f(a)\big).$$

et donc

$$G(b)f(b) - m\big(f(b)-f(a)\big) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant G(b)f(b) - M\big(f(b)-f(a)\big).$$

Or on a :

- $G(b)f(b) - m\big(f(b)-f(a)\big) = f(b)(G(b)-m) + mf(a) \geqslant mf(a)$
- $G(b)f(b) - M\big(f(b)-f(a)\big) = f(b)(G(b)-M) + Mf(a) \leqslant Mf(a)$

et donc

$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant Mf(a).$$

c) Si $f(a) = 0$ alors, comme f est décroissante et positive sur $[a,b]$, elle est nulle sur $[a,b]$ et donc la seconde formule de la moyenne est vérifiée avec $c = a$ par exemple.

Si $f(a) \neq 0$, alors posons $\mu = \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{f(a)}$. On a donc $m \leqslant \mu \leqslant M$. Ainsi $\mu \in G([a,b])$ et donc il existe $c \in [a,b]$ tel que $\mu = G(c)$. D'où la seconde formule de la moyenne.

Exercice 18 – Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt}\,\sqrt{\int_a^b g(t)^2\,dt}.$$

Discuter le cas d'égalité. *On fera le lien avec le discriminant du trinôme* $\int_a^b \big(f(t)+Xg(t)\big)^2\,dt$.

Correction : Analogue à l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les sommes finies (cf. TD n° 2).

Exercice 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

1) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire $J_n = \ln(2) - I_n$ sous forme intégrale et montrer que $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction :

1) Pour tous $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $t^{n+1} \leqslant t^n$ donc $\dfrac{1}{1+t+t^n} \leqslant \dfrac{1}{1+t+t^{n+1}} \leqslant 1$. La propriété de croissance de l'intégrale entraîne que $I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc elle converge.

2) On a $\ln(2) = \ln(1+1) - \ln(1+0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t}$ si bien que, par propriété de croissance de l'intégrale,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad J_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}\right) dt = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}\, dt \leqslant \int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1}.$$
Enfin, par positivité de l'intégrale, nous obtenons que $J_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Nous en déduisons, par encadrement, que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Ainsi $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ln(2)$.

Exercice 20. Considérons $f : x \longmapsto \displaystyle\int_{-x}^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt.$

1) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
2) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$.
3) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{3x^3} = 1$.

Correction :

1) La fonction $g : t \longmapsto \sqrt{1+t^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive G sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = G(2x) - G(-x)$. Puisque G est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f aussi et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2G'(x) + G'(-x) = 2g(2x) + g(-x) = 2\sqrt{1+16x^2} + \sqrt{1+x^4}.$$

2) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $t^4 \leqslant 1+t^4 \leqslant 1+t^4+2t^2 = (1+t^2)^2$. Puisque la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par propriété de croissance de l'intégrale (car $-x \leqslant 2x$), on a
$$\int_{-x}^{2x} t^2\, dt \leqslant \int_{-x}^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt \leqslant \int_{-x}^{2x} (1+t^2)\, dt$$
donc
$$\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-x}^{2x} \leqslant f(x) \leqslant \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_{-x}^{2x}$$
et donc
$$3x^3 = \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(-x)^3}{3} \leqslant f(x) \leqslant 2x + \frac{(2x)^3}{3} - x - \frac{(-x)^3}{3} = x + 3x^3.$$
Finalement
$$1 \leqslant \frac{f(x)}{3x^3} \leqslant 1 + \frac{1}{3x^2}.$$
Par encadrement, nous en déduisons que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{3x^3} = 1$.

Exercice 21. Considérons $f : x \longmapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}\, dt.$

1) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
2) En déduire que f est identiquement nulle sur son domaine de définition.

Correction :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la fonction $g : t \longmapsto \dfrac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $[\min(\frac{1}{x}, x), \max(\frac{1}{x}, x)]$ donc $f(x)$ est bien défini. Nous avons ainsi $D_f = \mathbb{R}^*$. Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = G(x) - G(\frac{1}{x})$. Puisque G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, nous en déduisons que f aussi. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f'(x) = G'(x) + \frac{1}{x^2}G'(\frac{1}{x}) = g(x) + \frac{1}{x^2}g(\frac{1}{x}) = \frac{x^2-1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}} + \frac{(\frac{1}{x})^2 - 1}{x^2(1+(\frac{1}{x})^2)\sqrt{1+(\frac{1}{x})^4}} = 0.$$
On montre de même (à l'aide d'une primitive de g sur $\mathbb{R}_-^*$ que f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ de dérivée nulle.

2) Nous en déduisons que f est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et constante sur $\mathbb{R}_+^*$ (pas la même constante a priori attention). Par ailleurs $f(1) = 0 = f(-1)$ donc f est nulle sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 24. Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = 0$. Montrer que

$$\forall t \in [a, b], \qquad \int_a^t f(u)\, du + \int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\, du = tf(t).$$

Correction : Puisque f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b]$, le théorème de la bijection entraîne que f est une bijection sur $[a, b]$ et que f^{-1} est continue sur $[a, b]$. Ainsi toutes les intégrales sont bien définies. Soient F et G des primitives de f et f^{-1} respectivement sur $[a, b]$. La fonction

$$\varphi : t \longmapsto \int_a^t f(u)\, du + \int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\, du - tf(t) = F(t) - F(a) + G(f(t)) - G(0) - tf(t)$$

est dérivable sur $]a, b[$ et,

$$\forall t \in \,]a, b[, \quad \varphi'(t) = F'(t) + f'(t)G'(f(t)) - f(t) + tf'(t) = f(t) + f'(t)f^{-1}(f(t)) - f(t) + tf'(t) = 0.$$

Ainsi φ est constante sur $]a, b[$. Par continuité, elle est donc constante sur $[a, b]$. Enfin $f(a) = 0$ donc $\varphi(a) = 0$ et donc f est nulle sur $[a, b]$. D'où l'égalité.

Exercice 25. Pour chacun des cas suivants, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

1) $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$,

2) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2 + n^2}$,

3) $u_n = \dfrac{1^x + 2^x + \cdots + n^x}{n^{x+1}}$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$,

4) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$,

5) $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n\, n!}\right)^{\frac{1}{n}}$,

6) $u_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \exp\left(\frac{k}{2n}\right)$.

Correction : Toutes ont été traitées en cours sauf la dernière. Allons-y :

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Coupons en deux la somme selon la parité de k :

$$\begin{aligned} u_n = \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{j}{n}\right) - \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{2j-1}{2n}\right) &= \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{j}{n}\right) - e^{-1/2n}\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{j}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1/(2n)}\right) \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{j}{n}\right). \end{aligned}$$

Puisque $\exp$ est continue sur $[0, 1]$, alors le théorème de convergence des sommes de Riemann entraîne que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{j}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 e^t\, dt = e - 1.$$

Comme $e^{-1/(2n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, nous en déduisons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On aurait pu se passer de ce théorème en reconnaissant une somme géométrique :

$$u_n = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} \Big(- e^{1/(2n)}\Big)^k = \frac{1}{2n}\left(\frac{1 - (-e^{1/(2n)})^{2n+1}}{1 + e^{1/(2n)}} - 1\right) = \frac{1}{2n}\frac{e^{(2n+1)/(2n)} - e^{1/(2n)}}{1 + e^{1/(2n)}} = \frac{e^{1/(2n)}}{2n}\frac{e - 1}{1 + e^{1/(2n)}}$$

et on en déduit encore que nous en déduisons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
