Correction de quelques exercices de la feuille de TD 13

Exercice 1. Donner le domaine de définition des fonctions suivants (et les prolonger éventuellement par continuité). Préciser ensuite les intervalles où elles sont dérivables et calculer leurs dérivées (préciser s'il y a des dérivées à gauche ou à droite).

1) $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$,
2) $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $(a,b,d,c) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$,
3) $x \mapsto \dfrac{-1}{(4x^2-1)^2}$,
4) $x \mapsto \sqrt{x^3-x^2}$,
5) $x \mapsto x^x$,
6) $x \mapsto x\ln(x)-x$,
7) $x \mapsto (x^5+3x^3+2)^8$,
8) $x \mapsto \ln\left(1+\cos(\pi x^2)\right)$,
9) $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{-1+\sqrt{x^4+1}}{2}}$,
10) $x \mapsto \dfrac{4x^3+x^2-3}{2x^2-5x+2}$,
11) $x \mapsto \ln(x^4-3x^2+2)$,
12) $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{(\sin(x)+2)^4}$,
13) $x \mapsto e^{\cos^2(x)}$,
14) $x \mapsto (1+x^2)e^{\mathrm{Arctan}(x)}$,
15) $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$,
16) $x \mapsto \sqrt[6]{\tan(x)}$,
17) $x \mapsto 1-\cos(\sqrt{|x-2|})$,
18) $x \mapsto (\sin(x))^{x^2}$,

Correction :

1) Traitée en cours.
2) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est définie et dérivable sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$. Pour tout $x \in D_f$
$$f'(x) = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{d-b}{(cx+d)^2}.$$
3) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{-1}{(4x^2-1)^2}$ est définie et dérivable sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$. Pour tout $x \in D_f$,
$$f'(x) = -(4\cdot 2x)\cdot(-2)\cdot(4x^2-1)^{-3} = \frac{16x}{(4x^2-1)^3}.$$
4) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^3-x^2} = \sqrt{x^2(x-1)}$ est définie sur $D_f = [1,+\infty[$ et dérivable sur $]1,+\infty[$. Pour tout $x \in\,]1,+\infty[$,
$$f'(x) = \frac{3x^2-2x}{2\sqrt{x^3-x^2}} = \frac{x(3x-2)}{2\sqrt{x^2(x-1)}} = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}.$$
5) Traitée en cours.
6) La fonction $f : x \mapsto x\ln(x)-x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \ln(x)$.
7) La fonction $f : x \mapsto (x^5+3x^3+2)^8$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 8(5x^4+9x^2)(x^5+3x^3+2)^7.$$
8) Traitée en cours.
9) Traitée en cours.
10) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2-5x+2 = 2(x-1/2)(x-2)$. Par conséquent la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x^3+x^2-3}{2x^2-5x+2}$ est définie et dérivable sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2},2\}$. Pour tout $x \in D_f$,
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(12x^2+2x)(2x^2-5x+2)-(4x^3+x^2-3)(4x-5)}{(2x^2-5x+2)^2} \\ &= \frac{24x^4-60x^3+24x^2+4x^3-10x^2+4x-(16x^4-20x^3+4x^3-5x^2-12x+15)}{(2x^2-5x+2)^2} \\ &= \frac{8x^4-40x^3+19x^2+16x-15}{(2x^2-5x+2)^2}. \end{aligned}$$

11) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y^2 - 3y + 2 = (y-1)(y-2)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2-1)(x^2-2) = (x-1)(x+1)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) > 0$$

si et seulement si $x > \sqrt{2}$, $x < -\sqrt{2}$ ou $-1 < x < 1$. Ainsi la fonction $f : x \mapsto \ln(x^4 - 3x^2 + 2)$ est continue et dérivable sur $D_f =]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]-1, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$. Pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{x^4 - 3x^2 + 2}.$$

12) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{(\sin(x)+2)^4}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $sin(x) + 2 \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin(x)(\sin(x)+2)^4 - \cos(x) \cdot 4\cos(x)(\sin(x)+2)^3}{(\sin(x)+2)^8} \\ &= \frac{-\sin(x)(\sin(x)+2) - 4\cos^2(x)}{(\sin(x)+2)^5} = -\frac{\sin(x)(\sin(x)+2)4\cos^2(x)}{(\sin(x)+2)^5}. \end{aligned}$$

13) La fonction $f : x \mapsto e^{\cos^2(x)}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -2\sin(x)\cos(x)e^{\cos^2(x)}.$$

14) La fonction $f : x \mapsto (1+x^2)e^{\operatorname{Arctan}(x)}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2xe^{\operatorname{Arctan}(x)} + (1+x^2)\frac{1}{1+x^2}e^{\operatorname{Arctan}(x)} = (2x+1)e^{\operatorname{Arctan}(x)}.$$

15) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\ln(\ln(x)))$ est bien défini si et seulement si $\ln(\ln(x))$ est bien défini et est strictement positif si et seulement si $\ln(x)$ est bien défini et est strictement supérieur à 1 si et seulement si $x > e$. Ainsi la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$ est définie et dérivable sur $D_f =]e, +\infty[$. Sur D_f,

$$f'(x) = (\ln \circ \ln \circ \ln)'(x) = \frac{(\ln \circ \ln)'(x)}{(\ln \circ \ln)(x)} = \frac{\frac{\ln'(x)}{\ln(x)}}{(\ln \circ \ln)(x)} = \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}.$$

16) La fonction $\tan$ est définie et positive (resp. strictement positive) sur chaque intervalle $[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}[$ (resp. $]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}[$), $k \in \mathbb{Z}$. La fonction $f : x \mapsto \sqrt[6]{\tan(x)}$ est donc définie sur $D_f = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ et dérivable sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. On a

$$\forall x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[, \qquad f'(x) = (1+\tan^2(x))\,\frac{1}{6}(\tan(x))^{1/6-1} = \frac{1+\tan^2(x)}{6\sqrt[6]{\tan^5(x)}}.$$

17) Traitée en cours.

18) Traitée en cours.

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire sur f' lorsque f est paire, impaire ou périodique ?

Correction :

- Si f est dérivable et paire sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -f'(-x)$. Ainsi f' est impaire.
- Si f est dérivable et impaire sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = +f'(-x)$. Ainsi f' est paire.

Exercice 3. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur leur intervalle de définition. Sont-elles de classes C^1 ?

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(\sqrt{|x|}) - \sqrt{|x|},$$

$$g : x \in \,]-1,1[\, \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(|x|)} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}, \qquad h : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

On pourra évaluer la fonction g en les points $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$ et $\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

- La fonction f a été étudiée en cours.
- La fonction g a été étudiée en cours.
- Une petite étude de fonction montre que la fonction $x \longmapsto x - \ln(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous en déduisons que h est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (par quotient de deux fonctions de classe C^1 avec la fonction dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$). Bien entendu h est aussi définie et de classe C^1 (et de dérivée nulle) sur $\mathbb{R}_-$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x - \ln(x)) - \ln(x)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln(x))^2} = \frac{1 - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2} = \frac{1}{\ln(x)} \frac{\frac{1}{\ln(x)} - 1}{\left(\frac{x}{\ln(x)} - 1\right)^2}.$$

  Par croissances comparées, $\dfrac{x}{\ln(x)} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ donc $h'(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Par ailleurs $h'(x) \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 0$ (puisque h' est nulle sur $\mathbb{R}_-$). Ainsi h' admet 0 pour limite en 0. Le théorème de prolongation de la dérivée entraîne que h est dérivable en 0 et que $h'(0) = 0$. Par ailleurs h' est continue en 0 donc h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 5.

1) Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$ et à valeurs réelles telle que $f(0) = 0$.
   a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence de $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, \delta]$, $|f(x) - xf'(0)| \leqslant \varepsilon x$.
   b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{f'(0)}{2}$.
2) En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right), \qquad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k + n^2}{2n^2 - k}, \qquad \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Correction :

1) a) Soit $\varepsilon > 0$. On a $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} f'(0)$ puisque f est dérivable en 0. Par conséquent il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \,]0, \delta]$, $\left|\dfrac{f(x)}{x} - f'(0)\right| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $|f(x) - xf'(0)| \leqslant \varepsilon$. Cette inégalité reste bien sûr vraie pour $x = 0$.
   b) *Cette question est très technique et elle dépasse le niveau attendu d'un élève d'ECS. La difficulté vient du fait qu'il faut découper la somme en deux. Elle mériterait donc d'être séparée en plusieurs questions (cf. annexe page 9).*
2) - La fonction Arctan est dérivable sur $[0,1]$ et nulle en 0 donc

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}'(0) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + 0^2} = \frac{1}{2}.$$

- La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{x+1}{2-x}$ est dérivable sur $[0,1]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{k+n^2}{2n^2-k} = \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2} + \sum_{k=0}^{n}\left(g\left(\frac{k}{n^2}\right) - g(0)\right).$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n}\left(g\left(\dfrac{k}{n^2}\right) - g(0)\right) = \dfrac{g'(0)}{2} = \dfrac{3}{8}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k+n^2}{2n^2-k} = +\infty$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n^2}\right),$$

avec $h : x \longmapsto \ln(1+x)$ dérivable sur $[0,1]$ et nulle en 0. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{h'(0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right) = e^{1/2}$ car ε est continue en $1/2$.

Exercice 6. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 1$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Correction : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est strictement positive si bien qu'elle est strictement croissante. Le théorème de la bijection entraîne que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Reste à montrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Introduisons pour cela la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = f'(x) - 1 \geqslant 0$. Elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$ et donc

- Si $x \geqslant 0$, $f(x) = g(x) + x \geqslant g(0) + x$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $x \leqslant 0$, $f(x) = g(x) + x \leqslant g(0) + x$. Par conséquent $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Nous en déduisons que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Exercice 7. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, simplifier $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2x^2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

Correction : La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{2x^2}$, $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x}$ et $x \longmapsto \dfrac{x-1}{x}$ le sont sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi la fonction

$$\Phi : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= -\frac{1}{x^3}\frac{1}{1+(1/2x)^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+((x+1)/x)^2} + \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+((x-1)/x)^2} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{x^2+(x+1)^2} + \frac{1}{x^2+(x-1)^2} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+2x+1} + \frac{1}{2x^2-2x+1} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{(2x^2+2x+1)-(2x^2-2x+1)}{(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{4x^4-4x^3+2x^2+4x^3-4x^2+2x+2x^2-2x+1} \\
&= -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{4x^4+1} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi Φ est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$. Or par continuité, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \operatorname{Arctan}(0) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = \operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ si bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = \dfrac{\pi}{2}$. De même on calcule que $\lim\limits_{x\to-\infty} \phi(x) = \dfrac{\pi}{2}$. Nous en déduisons que Φ est constante sur $\mathbb{R}^*$ égale à $\dfrac{\pi}{2}$. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 9. Dans l'exercice 11 de la feuille d'exercices 13, nous avons introduit les fonctions Arccos et Arcsin (les bijections de $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ et $\sin : [-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1]$ respectivement). Étudier la dérivabilité de ces fonctions sur $[-1,1]$ et calculer leurs dérivées.

Correction :

- La fonction $\cos$ est dérivable sur $[0,\pi]$ et, pour tout $x \in]0,\pi[$, $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$. Par conséquent Arccos est dérivable sur $f(]0,\pi[) =]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{1}{\cos'(\operatorname{Arccos}(x))} = \frac{-1}{\sin(\operatorname{Arccos}(x))}.$$

  Or, si $y \in]0,\pi[$, $\sin(y) > 0$ et donc $\sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)}$. Nous en déduisons que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- La fonction $\sin$ est dérivable sur $[-\pi/2,\pi/2]$ et, pour tout $x \in]-\pi/2,\pi/2[$, $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$. Par conséquent Arcsin est dérivable sur $f(]-\pi/2,\pi/2[) =]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin'(\operatorname{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arcsin}(x))}.$$

  Or, si $y \in]-\pi/2,\pi/2[$, $\cos(y) > 0$ et donc $\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}$. Nous en déduisons que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 14. Une fonction est dite Lipschitzienne sur I si elle est k-Lipschitzienne sur I pour un certain $k \in \mathbb{R}_+^*$ (cf. exercice 19 de la feuille d'exercices 12).

1) Existe-il des fonctions Lipschitzienne qui ne sont pas dérivables ?
2) Soit f une fonction dérivable et Lipschitzienne sur I. Montrer que f' est bornée.
3) Montrer que, si f est dérivable sur I et si f' est bornée sur I, alors f est Lipschitzienne sur I.

Correction :

1) L'inégalité triangulaire inversée entraîne que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+, \qquad \big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|.$$

   Cela signifie que la fonction valeur absolue est 1-Lipschitzienne sur $I = \mathbb{R}_+$. Elle n'est pourtant pas dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

2) Supposons que f est une fonction dérivable et Lipschitzienne sur I. Soit $x_0 \in I$. On a

$$\forall x \in I\backslash\{x_0\}, \qquad \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leqslant k.$$

En faisant tendre x vers x_0, on obtient $f'(x_0) \leqslant k$. Nous en déduisons que f' est bornée sur I (par k).

3) Supposons que f est une fonction dérivable sur I et que f' est bornée sur I (par un certain réel $M > 0$). L'inégalité des accroissement finis entraîne alors que

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad |f(x)-f(y)| \leqslant M\,|x-y|.$$

Ainsi f est M-Lipschitzienne sur I.

Exercice 16. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Supposons que $f(0) = 0$ et que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant f'(x)$.
2) En déduire les variations de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque f est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, le théorème des accroissements finis entraîne qu'il existe $c_x \in]0,x[$ tel que $f(x)-f(0) = f'(c_x)x$. Puisque $0 < c_x < x$ et que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f'(c_x) \leqslant f'(x)$. Ainsi $f(x) = f(x)-f(0) \leqslant f'(x)x$. D'où l'inégalité annoncée puisque $x > 0$.

La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right) \geqslant 0,$$

d'après ce qui précède. Ainsi g est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 19. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-x}\ln(1+e^x)$.

1) Étudier les limite de f en $\pm\infty$.
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}g(e^x)$. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. Vérifier que $\ell \in]0,1[$.
4) Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ par $\ln(2)$.
5) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = e^{-x_n}\ln(1+e^{x_n})$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
6) Écrire un programme en `Scilab` qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Correction :

1) On a $\dfrac{\ln(1+y)}{y} \underset{y\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et $e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ si bien que $f(x) = \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$.

   Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-x}\ln(1+e^x) = e^{-x}\ln\left(e^x(e^{-x}+1)\right) = xe^{-x} + e^{-x}\ln(e^{-x}+1).$$

   Par croissances comparées, on a $xe^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus $e^{-x}\ln(e^{-x}+1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x} = e^{-x}g(e^x)$$

   avec, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $g(y) = -\ln(1+y) + \dfrac{y}{1+y}$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(y) = -\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+y} - \frac{y}{(1+y)^2} = -\frac{y}{(1+y)^2} < 0.$$

Il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$ si bien que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) La fonction $h : x \longmapsto f(x) - x$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonction qui le sont. Le théorème de la bijection entraîne alors que h est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ainsi 0 admet un unique antécédent ℓ par h. Cela signifie qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.

   On a $\ell = f(\ell) \in f(\mathbb{R}) =]0,1[$, d'après la question 1.

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$|f'(x)| = |e^{-x}g(e^x)| = -e^{-x}g(e^x) = e^{-x}\ln(1+e^x) - \frac{1}{1+e^x} \leqslant e^{-x}\ln(1+e^x) = f(x) \leqslant f(0) = \ln(2).$$

5) Si $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1 = f(x_0) > 0$ et une récurrence immédiate montre que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ par $\ln(2)$, l'inégalité des accroissements finis entraîne que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant \ln(2)|x-y|.$$

   En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)| \leqslant \ln(2)|x_n - \ell|.$$

   Par récurrence immédiate, on obtient donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |x_n - \ell| \leqslant (\ln(2))^{n-1}|x_1 - \ell|.$$

   Puisque $|\ln(2)| < 1$, nous en déduisons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

6) On choisit x_0 de telle sorte que $|x_1 - \ell| \leqslant 1$. On a alors, $|x_n - \ell| \leqslant \ln(2)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près, il suffit de calculer x_{n_0} où n_0 est tel que $\ln(2)^{n_0-1} \leqslant 10^{-4}$. Or on a

$$\ln(2)^{n_0-1} \leqslant 10^{-4} \iff (n_0 - 1)\ln(\ln(2)) \leqslant -4\ln(10) \iff n_0 \geqslant 1 - \frac{4\ln(10)}{\ln(\ln(2))},$$

   puisque $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Voici un programme Scilab renvoyant une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-4} près :

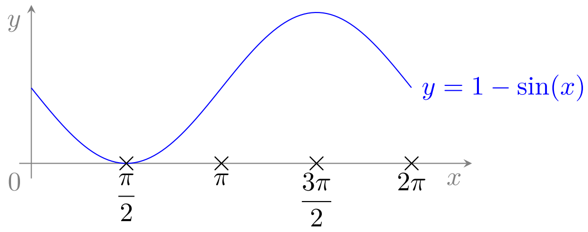
```
x=input('Entrez le terme initial :');
n=floor(1-4*log(10)/log(log(2)))+1;
for  k=1:n
     x=exp(-x)*log(1+exp(x));
end
disp('Une valeur approchée de la limite à 10∧(-4) près est'+string(x)+'.')
```

Exercice 20. Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1 - \sin(x)$.

1) Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative sur $[0, 2\pi]$.
2) Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \sin(u_n)$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \geqslant 3$, $c \leqslant u_n \leqslant 1$.
3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Correction :

1) La fonction f est dérivable sur $[0, 2\pi]$ et $f' = -\cos$. Ainsi f est croissante sur $[\pi/2, 3\pi/2]$ et décroissante sur $[0, \pi/2]$ et sur $[3\pi/2, 2\pi]$. On en déduit la courbe représentative de f :



2) On a $u_1 = 1-\sin(u_0) \in [0,2]$. Ainsi $u_1 = 1-\sin(u_1) \in [0,1]$ (puisque $2 \in [0,\pi]$). Enfin $u_3 = 1-\sin(u_2) \in [1-\sin(1), 1]$. Posons $c = 1-\sin(1)$. Par récurrence immédiate, on montre que $u_n \in [c,1]$ pour tout $n \geqslant 3$.

3) Soit $g : x \in [c,1] \longmapsto f(x) - x$. La fonction g est dérivable (donc continue) sur $[c,1]$ et $g' = -\cos -1 < 0$ donc g est strictement décroissante sur $[c,1]$. De plus $g(1) = -\sin(1) < 0$ et $g(c) = f(c) - c = \sin(1) - \sin(c) > 0$. Ainsi le théorème de la bijection entraîne l'existence d'un unique réel $\ell \in]c,1[$ tel que $g(\ell) = 0$, i.e. $f(\ell) = \ell$.

   Posons $M = \max\limits_{[c,1]} |\cos|$. On a $|f'| = |\cos| \leqslant M$ sur $[c,1]$ donc le théorème des accroissements finis entraîne que
$$\forall (x,y) \in [c,1]^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x-y|.$$
   Ainsi, pour tout $n \geqslant 3$, $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant M|u_n - \ell|$ et donc (par récurrence immédiate)
$$\forall n \geqslant 3, \qquad |u_n - \ell| \leqslant M^{n-3}|u_3 - \ell|.$$
   Puisque $M < 1$, nous obtenons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

ANNEXE

N'abordez cette question que si vous avez abordé et compris tout le reste...

La question 1b de l'exercice 5 peut être découpée en plusieurs étapes. Les voici :

- Justifier l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n \geqslant n_0$ et $k \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{k}{n^2} \in [0, \delta]$.

  Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{n_0} \leqslant \delta$. Par conséquent, si $n \geqslant n_0$ et $k \in [\![0, n]\!]$, alors $0 \leqslant \dfrac{k}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n_0} \leqslant \delta$.

- Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \sum_{k=n_0}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0)\right| \leqslant \varepsilon$.

  Il s'ensuit que, si $n \geqslant n_0$ et $k \in [\![0, n]\!]$, $\left|f\left(\dfrac{k}{n^2}\right) - \dfrac{k}{n^2} f'(0)\right| \leqslant \varepsilon \dfrac{k}{n^2}$. L'inégalité triangulaire entraîne que, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \sum_{k=n_0}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0)\right| = \left|\sum_{k=n_0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0)\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0)\right| \leqslant \sum_{k=n_0}^{n} \frac{k}{n^2} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\varepsilon = \frac{n(n+1)\varepsilon}{2n^2} \leqslant \varepsilon$$

- Justifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} \left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

  Fixons $k \in [\![0, n_0]\!]$. On a $\dfrac{k}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et f est continue en 0 donc $f\left(\dfrac{k}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0) = 0$. Ainsi $\left|f\left(\dfrac{k}{n^2}\right) - \dfrac{k}{n^2} f'(0)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On conclut en sommant (il n'y a qu'un nombre fini de termes).

- En déduire qu'il existe $n_0' \geqslant n_0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0'$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0)\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

  Il existe alors $n_0' \in \mathbb{N}$ (que l'on peut choisir supérieur à n_0) tel que, pour tout $n \geqslant n_0'$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n_0-1} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{k}{n^2} f'(0)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n_0-1} \left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2} f'(0)\right| \leqslant \varepsilon$$

  On conclut en utilisant la question ii) et l'inégalité triangulaire.

- Conclure.

  Nous venons de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que cette inégalité est vraie à partir du rang n_0'. Cela signifie que

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Enfin $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) = \frac{f'(0)}{n^2} \sum_{k=0}^{n} k = \frac{f'(0)n(n+1)}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f'(0)}{2}$ *et donc*

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) + \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f'(0)}{2} + 0.$$

  Toujours là ?