Correction de quelques exercices de la feuille de TD 12

Exercice 3. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet exactement trois solutions réelles distinctes. A l'aide d'un raisonnement par dichotomie, déterminer des encadrement de longueur au plus 10^{-1} de ces trois solutions (on pourra utiliser Scilab).

Correction : Notons $f : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$. Il s'agit d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Puisque

- $f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$ et $0 \in [-1, 3]$, le TVI entraîne qu'il existe $s \in [-2, -1]$ tel que $f(s) = 0$.
- $f(0) = 1$, $f(1) = -3$ et $0 \in [-1, 1]$, le TVI entraîne qu'il existe $s \in [0, 1]$ tel que $f(t) = 0$.
- $f(1) = -1$, $f(2) = 3$ et $0 \in [-1, 2]$, le TVI entraîne qu'il existe $u \in [-2, -1]$ tel que $f(u) = 0$.

La fonction f s'annule en trois points distincts. Puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré 3, ce sont les seuls.

Procédons par dichotomie pour donner une valeur approchée de s, t et u à 10^{-1} près.

- Pour s, on pose $a_0 = -2$ et $b_0 = -1$.
  - On calcule que $f\left(\dfrac{a_0 + b_0}{2}\right) = \dfrac{17}{8} > 0$ donc on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = -\dfrac{3}{2}$. On a $|b_1 - a_1| > 10^{-1}$.
  - On calcule que $f\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}\right) = \dfrac{57}{64} > 0$ donc on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} = -\dfrac{7}{4}$. On a $|b_2 - a_2| > 10^{-1}$.
  - On calcule que $f\left(\dfrac{a_2 + b_2}{2}\right) > 0$ donc on pose $a_3 = a_2$ et $b_3 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} = -\dfrac{15}{8}$. On a $|b_3 - a_3| > 10^{-1}$.
  - On calcule que $f\left(\dfrac{a_3 + b_3}{2}\right) < 0$ donc on pose $a_4 = \dfrac{a_3 + b_3}{2} = -\dfrac{31}{16}$ et $b_4 = b_3$. On a $|b_4 - a_4| > 10^{-1}$.

  Ainsi un encadrement de longueur 10^{-1} de s est $\left[-\dfrac{31}{16}, -\dfrac{15}{8}\right]$.
- De même on obtient l'encadrement $\left[\dfrac{5}{16}, \dfrac{3}{8}\right]$ de t un encadrement de longueur 10^{-1}.
- De même on obtient l'encadrement $\left[\dfrac{3}{2}, \dfrac{25}{16}\right]$ de u un encadrement de longueur 10^{-1}.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. L'objectif de cet exercice est de montrer que f admet un unique point fixe, *i.e.* il existe un unique réel y tel que $f(y) = y$.

1) On pose $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) - x$. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
2) En déduire que f admet un point fixe et qu'il est nécessairement unique.
3) Est-ce que ce résultat est vrai si f est une fonction croissante ?

Correction :

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $g(x) = f(x) - x \leqslant f(0) - x$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $f(0) - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, nous obtenons par encadrement que $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, on a $g(x) = f(x) - x \geqslant f(0) - x$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Puisque $f(0) - x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$, nous obtenons par encadrement que $g(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2) Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \left] \lim\limits_{x \to +\infty} g(x), \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) \right[$, le TVI entraîne l'existence d'un réel c tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

   Ce point fixe est forcément unique car si $c' \neq c$ désigne un autre point fixe, alors :

- ou bien $c < c'$ et alors $c = f(c) \geqslant f(c') = c'$. Absurde.
- ou bien $c > c'$ et alors $c = f(c) \leqslant f(c') = c'$. Absurde.

3) Ce résultat est faux si f est croissante. IL suffit de considérer la fonction $x \longmapsto x - 1$ qui n'admet pas de points fixes.

Exercice 8. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > m$.

Correction : La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ dont elle est minorée et elle atteint son minimum en un certain point $x_0 \in [a, b]$. Le réel $m = \dfrac{f(x_0)}{2}$ est strictement positif et on a

$$\forall x \in [a, b], \qquad f(x) \geqslant f(x_0) = \frac{f((x_0)}{2} = m.$$

Exercice 9. Dans les cas suivants, montrer que f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J (que l'on précisera) et expliciter f^{-1} sur J.

$$1)\ f : x \mapsto \sqrt{1 + 3(\ln(x))^2}, \qquad 2)\ f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 2}}, \qquad 3)\ f : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Déjà, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 2 > 0$ donc $D_f = \mathbb{R}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus la fonction $x \longmapsto x^2+x+2$ est strictement croissante (resp. décroissante) sur $I = [-1/2, +\infty[$ (resp. $I' =]-\infty, -1/2]$). Par conséquent la fonction f est strictement décroissante (resp. croissante) sur I (resp. I'). Ainsi le théorème de la bijection entraîne que $f\big|_I$ (resp. $f\big|_{I'}$) réalise une bijection de I sur $f(I)$ (resp. de I' sur $f(I')$).
   - **Réciproque de $f\big|_I$.** La réciproque est continue et strictement décroissante sur $f(I)$.

     Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 0^+$, on obtient par composition que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$. On a aussi $f(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Ainsi $f(I) =]0, \frac{2}{\sqrt{7}}]$. Exprimons la réciproque. Pour tout $x \in I$ et $y \in f(I)$, on a

     $$y = f(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{y^2} = x^2 + x + 2,$$

     car $t \longmapsto t^{-2}$ est une bijection sur $f(I) \subset \mathbb{R}_+^*$. Ainsi $y = f(x)$ si et seulement si $x^2 + x + 2 - \dfrac{1}{y^2} = 0$. Il s'agit d'un trinôme du second degré dont le discriminant est $\Delta_y = 1 - 4\left(2 - \dfrac{1}{y^2}\right) = \dfrac{4}{y^2} - 7 > 0$ car $y < \dfrac{2}{\sqrt{7}}$. Puisque $x > -\dfrac{1}{2}$, on en déduit que $y = f(x)$ si et seulement si $x = \dfrac{-1 + \sqrt{\Delta_y}}{2}$.

     La réciproque de f sur I est donc $y \in]0, \frac{2}{\sqrt{7}}] \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{\dfrac{4}{y^2} - 7}\right)$.
   - **Réciproque de $f\big|_{I'}$.** La réciproque est continue et strictement croissante sur $f(I')$.

     On montre de même que la réciproque de f sur I' est donc $y \in]0, \frac{2}{\sqrt{7}}] \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{\dfrac{4}{y^2} - 7}\right)$.
3) Une brève étude de fonction montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante (resp. décroissante) sur $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}_-$). Ainsi le théorème de la bijection entraîne que $f\big|_I$ (resp. $f\big|_{I'}$) réalise une bijection continue et strictement décroissante (resp. croissante) de I sur $f(I)$ (resp. de I' sur $f(I')$).

- **Réciproque de $f|_{\mathbb{R}_+}$.** La réciproque est continue et strictement croissante sur $f(\mathbb{R}_+)$.

  Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = e^x \dfrac{1+e^{-2x}}{2}$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On a aussi $f(0) = 1$. Ainsi $f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$. Exprimons la réciproque. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in f(\mathbb{R}_+)$, on a

$$\begin{aligned} y = f(x) \quad &\iff \quad y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad &\iff \quad & e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0, \\ & & \iff \quad & X^2 - 2yX + 1 = 0 \text{ et } X = e^x. \end{aligned}$$

  Il s'agit d'un trinôme du second degré dont le discriminant est $\Delta_y = 4y^2 - 4 = 4(y^2-1)$ car $y > 1$. Puisque $x \geqslant 0$, on en déduit que $y = f(x)$ si et seulement si $e^x = \dfrac{2y + \sqrt{\Delta_y}}{2} = y + \sqrt{y^2-1}$.

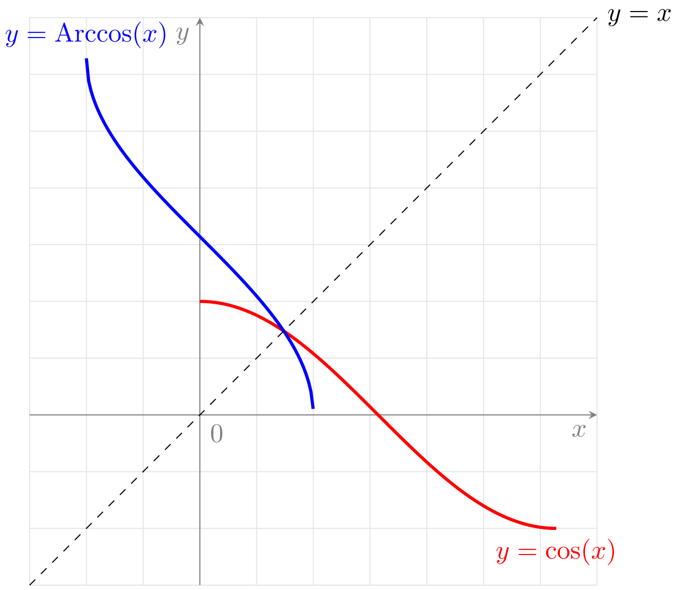
  La réciproque de f sur $\mathbb{R}_+$ est donc $y \in [1, +\infty[\longmapsto \ln(y + \sqrt{y^2-1})$.
- **Réciproque de $f|_{\mathbb{R}_-}$.** La réciproque est continue et strictement décroissante sur $f(\mathbb{R}_-)$.
  On montre de même que la réciproque de f sur $\mathbb{R}_-$ est $y \in [1, +\infty[\longmapsto \ln(y - \sqrt{y^2-1})$.

Exercice 10.

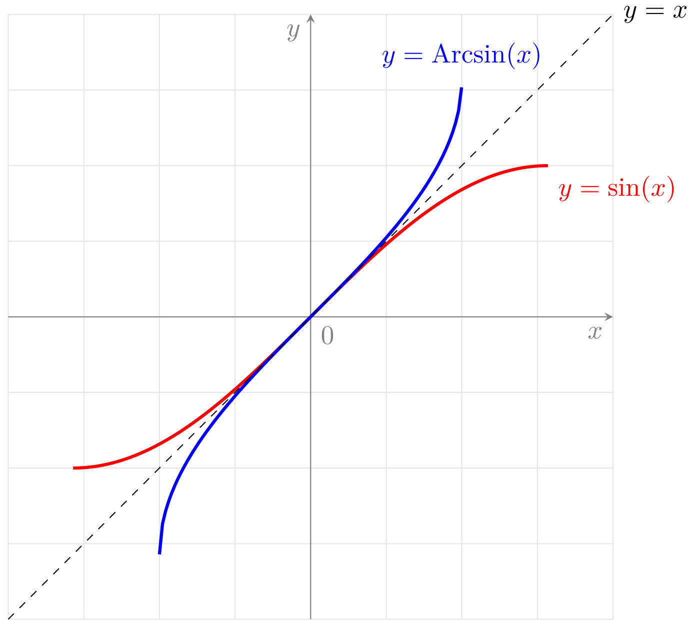
1) Montrer que la fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur un intervalle à préciser. On note Arccos sa bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de Arccos et tracer sa courbe représentative.
2) Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur un intervalle à préciser. On note Arcsin sa bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de Arcsin et tracer sa courbe représentative.
3) Donner les valeurs de $\sin(\operatorname{Arccos}(x))$ et $\cos(\operatorname{Arcsin}(x))$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

Correction :

1) La fonction $\cos$ est strictement décroissante et continue sur $[0, \pi]$. De plus $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. Ainsi le théorème de la bijection entraîne qu'elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Sa réciproque est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.



2) La fonction $\sin$ est strictement croissante et continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$. De plus $\sin(-\pi/2) = -1$ et $\cos(\pi/2) = 1$. Ainsi le théorème de la bijection entraîne qu'elle réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. Sa réciproque est strictement croissante sur $[-1, 1]$.



3) Soit $x \in [-1, 1]$. On a

- $\cos(\mathrm{Arccos}(x)) = x$ donc $\sin^2(\mathrm{Arccos}(x)) = 1 - \cos^2(\mathrm{Arccos}(x)) = 1 - x^2$. Or $\mathrm{Arccos}(x) \in [0, \pi]$ donc $\sin(\mathrm{Arccos}(x)) > 0$ et donc $\sin(\mathrm{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
- $\sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = x$ donc $\cos^2(\mathrm{Arccos}(x)) = 1 - \sin^2(\mathrm{Arccos}(x)) = 1 - x^2$. Or $\mathrm{Arcsin}(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ donc $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) > 0$ et donc $\cos(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Exercice 14. Soient $f : x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2x}{1 - x^2}\right)$ et $g : x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\longmapsto \tan(x)$

1) Préciser l'ensemble de définition D_f de f. Prolonger f aux éventuelles bornes finies de D_f afin qu'elle soit continue à gauche (si c'est possible).
2) Expliciter l'application $f \circ g$. En déduire $f(x)$ en fonction de $\mathrm{Arctan}(x)$ pour tout $x \in D_f$.
3) Représenter graphiquement l'application f dans un repère orthonormé.

Correction :

1) On a $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$ et $D_g = \mathbb{R}$. De plus

$$\lim_{x \to (-1)^-} \frac{2x}{1 - x^2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{1 - x^2} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to (-1)^+} \frac{2x}{1 - x^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{1 - x^2} = -\infty$$

donc, par composition

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Pour que f soit continue à gauche, on la prolonge en posant $f(-1) = f(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

2) Si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\Big\backslash \left\{ -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4} \right\}$, alors la formule de duplication de la tangente entraîne alors que $\dfrac{2g(x)}{1 - g^2(x)} = g(2x)$. Par conséquent

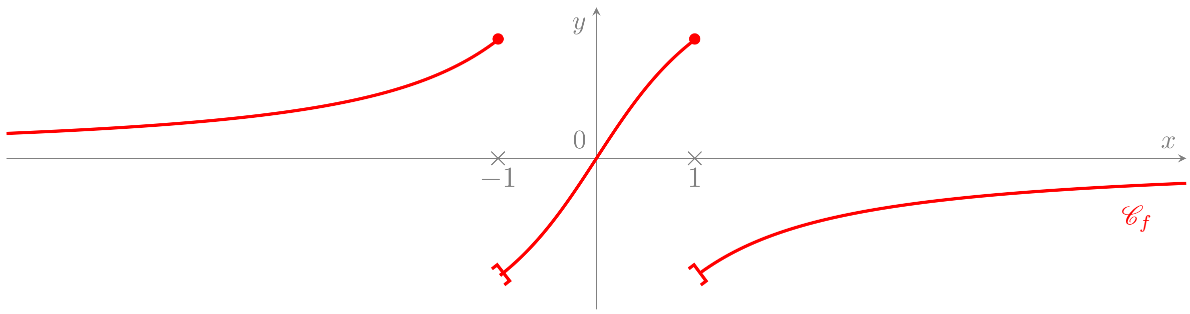
$$f \circ g(x) = \mathrm{Arctan}(\tan(2x)) = \begin{cases} 2x + \pi & \text{si} \quad x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right[, \\ 2x & \text{si} \quad x \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[, \\ 2x - \pi & \text{si} \quad x \in \left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$$

Soit $x \in D_f$. On a donc

$$f(x) = f \circ g \circ g^{-1}(x) = \begin{cases} 2\,\mathrm{Arctan}(x) + \pi & \text{si} \quad \mathrm{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[, \\ 2\,\mathrm{Arctan}(x) & \text{si} \quad \mathrm{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[, \\ 2\,\mathrm{Arctan}(x) - \pi & \text{si} \quad \mathrm{Arctan}(x) \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\,\mathrm{Arctan}(x) + \pi & \text{si} \quad x \in \left]-\infty, -1\right[, \\ 2\,\mathrm{Arctan}(x) & \text{si} \quad x \in \left]-1, 1\right[, \\ 2\,\mathrm{Arctan}(x) - \pi & \text{si} \quad x \in \left]1, +\infty\right[. \end{cases}$$

3) On en déduit le tracé de la courbe représentative de f :



Exercice 15. Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto x\ln(x)$.

1) Montrer que, pour tout $t > 0$, il existe un unique réel $g(t) > 1$ tel que $f(g(t)) = \frac{1}{t}$.
2) Montrer g ainsi définie est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction :

1) La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$. Si x et y sont des réels de $[1, +\infty[$, alors $0 \leqslant \ln(x) < \ln(y)$ (par stricte croissance de $\ln$) et donc $x\ln(x) < y\ln(y)$. Ainsi f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Le théorème de la bijection entraîne que f est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[)$. De plus $f([1, +\infty[) = [0, +\infty[)$ puisque $f(1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. En particulier, pour tout $t \in [0, +\infty[)$, $\frac{1}{t} \in [0, +\infty[)$, il existe un unique $g(t) \in [1, +\infty[)$ tel que $f(g(t)) = \frac{1}{t}$.
2) Le théorème de la bijection nous assure aussi que f^{-1} est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[)$. De plus
$$\forall t \in [0, +\infty[), \qquad g(t) = f^{-1}\left(\frac{1}{t}\right).$$
Nous en déduisons que g est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 17. Soient f et g deux fonctions bornées sur un intervalle I. Montrer que $f + g$ est bornée sur I et que $\sup\limits_I |f + g| \leqslant \sup\limits_I |f| + \sup\limits_I |g|$. Montrer qu'il n'y a pas égalité en général.

Correction : Notons M_f et M_g les bornes supérieures de $|f|$ et $|g|$ respectivement. Pour tout $x \in I$, on a

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant M_f + M_g.$$

Ainsi $|f + g|$ est majorée sur I par $M_f + M_g$. Nous en déduisons que $f + g$ admet une borne supérieure et que celle-ci est inférieure ou égale à $M_f + M_g$.

Il n'y a pas d'égalité en général. Prenons par exemple le cas des fonctions sinus et cosinus, toutes les deux bornées par 1. Pourtant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\cos(x)+\sin(x)| = \sqrt{2}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\right| = \sqrt{2}\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \sqrt{2} < 2.$$

Exercice 18. Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ telle que $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donner un contre-exemple lorsque f n'est pas croissante.

Correction : Soit $A>0$. Puisque $f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $f(n) \geqslant A$. Posons $B = n_0$. Si $x \geqslant B$, alors $f(x) \geqslant f(B) = f(n_0) \geqslant A$ (par croissance de f). Ainsi :

$$\forall A>0, \qquad \exists B>0, \qquad \forall x \geqslant B, \qquad f(x) \geqslant A.$$

Ainsi $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Considérons $f_0 : x \longmapsto x\cos(2\pi x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_0(n) = n\cos(2\pi n) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par contre f_0 (qui n'est pas croissante) ne tend pas vers $+\infty$. En effet, si c'était le cas, on aurait $0 = f_0\left(n+\frac{1}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est absurde.

Exercice 19. Soit f une fonction croissante sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$. On souhaite montrer que f admet un point fixe

1) Montrer que $A = \{x \in [0,1] \,|\, f(x) \geqslant x\}$ possède une borne supérieure a vérifiant $f(a) \geqslant a$.
2) Montrer que $f(a) \in A$ et conclure.
3) Qu'en est-il si f est décroissante ?

Correction :

1) La partie A est non vide (car $f(0) \geqslant 0$ donc $0 \in A$) et majorée par 1. Le théorème de la borne supérieure nous assure qu'elle possède une borne supérieure a. Si $x \in A$, on a $x \leqslant a$ donc $f(x) \leqslant f(a)$ (par croissance de f) et donc $x \leqslant f(a)$. Cela signifie que $f(a)$ est un majorant de a et donc $a \leqslant f(a)$.
2) Comme $a \leqslant f(a)$, la croissance de f entraîne que $f(a) \leqslant f(f(a))$. Cela signifie que $f(a) \in A$. Il s'ensuit que $f(a) \leqslant a$. Nous en déduisons que $f(a) = a$. Ainsi f admet un point fixe.
3) La fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,1/2] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \,]1/2,1] \end{cases}$ est décroissante sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ mais elle n'admet pas de points fixes.
