Correction de quelques exercices de la feuille de TD 11

Exercice 1. Étudier les (éventuelles) limites suivantes. On distinguera éventuellement les limites à gauche et à droite.

1) $x \mapsto \dfrac{2}{4x-3x^2-1}$ en 1.
2) $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ en 0.
3) $x \mapsto \sqrt{7-x}-\sqrt{3-x}$ en 0 et en $-\infty$.
4) $x \mapsto \dfrac{3x-\sqrt{x}}{x+2\ln(x)}$ en $+\infty$.
5) $x \mapsto 2x^4+x-5+\dfrac{\sqrt{4x^2-8x+4}}{x-1}$ en 1.
6) $x \mapsto x^3e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$.
7) $x \mapsto x^x$ en 0^+.
8) $x \mapsto \dfrac{3-5x}{x^2\ln(x)}$ en 0^+ et en $+\infty$.
9) $x \mapsto x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.
10) $x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$.
11) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{3}-2\cos(x)}{1-2\sin(x)}$ en $\dfrac{\pi}{6}$.
12) $x \mapsto \dfrac{7\sin(x)-\sin(5x)}{\sin(6x)}$ en 0.
13) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin(x)}$ en 0.
14) $x \mapsto \ln(x)\ln(\ln(x))$ en 1^+.
15) $x \mapsto \ln(\sin(x))-\ln(x)$ en 0^+.
16) $x \mapsto \sin(\ln(x))$ en $+\infty$.
17) $x \mapsto \dfrac{3\sin(x)-4\sin^3(x)}{\sin(3x)}$ en 0.
18) $x \mapsto x^\alpha\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en 0^+, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Correction :

1) Traitée en cours.
2) Traitée en cours.
3) Traitée en cours.
4) Traitée en cours.
5) Posons $f : x \mapsto 2x^4+x-5+\dfrac{\sqrt{4x^2-8x+4}}{x-1}$. On a $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,

$$f(x) = 2x^4+x-5+\frac{\sqrt{4(x-1)^2}}{x-1} = 2x^4+x-5+\frac{2|x-1|}{x-1}.$$

   - Si $x>1$, $f(x) = 2x^4+x-3 \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} -3$.
   - Si $x<1$, $f(x) = 2x^4+x-7 \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} -7$.

6) Traitée en cours.
7) Traitée en cours.
8) Par croissances comparées, $x^2\ln(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0^-$. Comme $3-5x \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 3$, nous en déduisons que

$$\frac{3-5x}{x^2\ln(x)} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} -\infty.$$

Ensuite $\dfrac{3}{x}-5 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -5$ et $x\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc

$$\frac{3-5x}{x^2\ln(x)} = \frac{\frac{3}{x}-5}{x\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

9) On a $\dfrac{\ln(1+u)}{u} \underset{u\to0}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

10) Par continuité de $\exp$ en 1, on a

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(1)=e.$$

11) Traitée en cours.

12) Traitée en cours.

13) Pour tout $x\in[-1,1]\backslash\{0\}$,

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin(x)} = \frac{1+x-(1-x)}{\sin(x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{x}{\sin(x)}\,\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.$$

Or $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 2$ et $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$ donc

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin(x)} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1.$$

14) On a $\ln(x) \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} 0^+$ par continuité de $\ln$ en 1^-. De plus $u\ln(u) \underset{u\to0^+}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi $\ln(x)\ln(\ln(x)) \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} 0$.

15) On a $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 1$ et $\ln$ est continue en 1 donc

$$\ln(\sin(x))-\ln(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} \ln(1)=0.$$

16) Supposons que $x\mapsto\sin(\ln(x))$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Puisque $e^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il s'ensuit que $\sin(n)\sin(\ln(e^n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. C'est absurde (cf. DM n° 4). Ainsi la fonction $x\mapsto\sin(\ln(x))$ n'admet pas de limite finie. Elle n'admet pas non plus de limite infinie puisqu'elle est bornée par 1.

17) Pour tout $x\in\,]-1,1[$,

$$\frac{3\sin(x)-4\sin^3(x)}{\sin(3x)} = \frac{\sin(3x)}{\sin(3x)} = 1 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1.$$

18) Traitée en cours.

Exercice 2. Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

1) $x\mapsto\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

2) $x\mapsto\ln(e^x+e^{-x})$.

3) $x\mapsto\dfrac{x^3-4x^2+5x+1}{9-4x^2}$.

4) $x\mapsto\sqrt[3]{\dfrac{2+3x}{x-5}}$.

5) $x\mapsto x+\sqrt{x+1}\ln(x+1)$.

6) $x\mapsto\sqrt{\dfrac{(x-1)^3}{x+1}}$.

Correction : Les trois premières et la cinquième ont été traitées en cours.

4) La fonction $f : x\longmapsto\sqrt[3]{\dfrac{2+3x}{x-5}}$ est définie sur $D_f=\,]-\infty,-\frac{2}{3}]\cup]5,+\infty[$.

- **en** 5^+ **:** On a $\dfrac{2+3x}{x-5} \underset{x\to5^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\sqrt{u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par composition, $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{2+3x}{x-5}} \underset{x\to5^+}{\longrightarrow} +\infty$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote verticale en 5^+.
- **en** $\pm\infty$ **:** Pour tout $x\in D_f$, on a $\dfrac{2+3x}{x-5}=\dfrac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{5}{x}}$. Ainsi $\dfrac{2+3x}{x-5} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 3$ et, par continuité de la fonction racine cubique en 3, on obtient $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt[3]{3}$. De même $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \sqrt[3]{3}$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale en $\pm\infty$.

6) La fonction $f : x\longmapsto\sqrt{\dfrac{(x-1)^3}{x+1}}$ est définie sur $D_f=\,]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$.

- **en** $(-1)^-$ **:** On a $\dfrac{(x-1)^3}{x+1} \underset{x\to(-1)^-}{\longrightarrow} +\infty$ et $\sqrt{u} \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par composition, $f(x) \underset{x\to5^+}{\longrightarrow} +\infty$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote verticale en $(-1)^-$.
- **en** $+\infty$ **:** Pour tout $x\in[1,+\infty[$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2(1+x)}} = \sqrt{\frac{(1-\frac{1}{x})^3}{1+\frac{1}{x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ensuite, en multipliant par la quantité conjuguée,

$$f(x)-x = \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}} - x = \frac{\frac{(x-1)^3}{x+1} - x^2}{\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}} + x} = \frac{\frac{(x-1)^3}{x(x+1)} - x}{\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}} + 1}.$$

On a $\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}} + 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ et

$$\frac{(x-1)^3}{x(x+1)} - x = \frac{x^3-3x^2+3x-1-x^3-x^2}{x(x+1)} = \frac{-4x^2+3x-1}{x(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -4.$$

Ainsi $f(x)-x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -2$. Nous en déduisons que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y=x-2$ pour asymptote oblique en $+\infty$.
- **en** $-\infty$ **:** Pour tout $x\in\,]-\infty,-1[$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = -\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2(1+x)}} = -\sqrt{\frac{(1-\frac{1}{x})^3}{1+\frac{1}{x}}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1.$$

Ensuite, en multipliant par la quantité conjuguée,

$$f(x)+x = \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}} + x = \frac{\frac{(x-1)^3}{x+1} - x^2}{\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+1}} - x} = \frac{\frac{(x-1)^3}{x(x+1)} - x}{-\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}} - 1}.$$

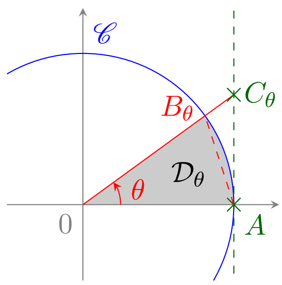
On a $\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\sqrt{-\frac{(x-1)^3}{x^2(x+1)}} - 1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -2$ et

$$\frac{(x-1)^3}{x(x+1)} - x = \frac{-4x^2+3x-1}{x(x+1)} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -4.$$

Ainsi $f(x)-x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 2$. Nous en déduisons que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y=-x+2$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

Exercice 3. Notons $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé et $\mathcal{D}$ le disque (d'aire π) dont il est la frontière. Soit A le point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(1,0)$. Fixons $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et notons

- B_θ le point du cercle $\mathscr{C}$ tel que l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB_\theta})=\theta$.
- C_θ le point d'intersection de la droite $(0B_\theta)$ avec la droite d'équation $x=1$.
- $\mathcal{D}_\theta$ le secteur angulaire délimité par $\mathscr{C}$ et par les deux rayons $[OA]$ et $[OB_\theta]$.



1) Sachant que l'aire de $\mathcal{D}_\theta$ est proportionnelle à l'angle θ, calculer son aire.
2) Calculer l'aire des triangles AOB_θ et AOC_θ.
3) En remarquant que $AOB_\theta\subset\mathcal{D}_\theta\subset AOC_\theta$, en déduire que $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}=1$.

Correction :

1) D'après l'énoncé, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\mathcal{D}_\theta=\lambda\theta$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$. Puisque le périmètre de $\mathscr{C}$ est égal à 2π et son aire à π, on a $\pi=\mathcal{D}_\pi=\lambda2\pi$ et donc $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

2) L'aire du triangle AOB_θ est $\dfrac{1 \times \sin(\theta)}{2}$ et l'aide du triangle AOC_θ est $\dfrac{1 \times \tan(\theta)}{2}$.

3) L'aire de la portion de disque d'angle θ (la zone en gris) est alors $\theta/2$ et elle est comprise entre l'aire du triangle AOB_θ et l'aire du triangle AOC_θ. C'est-à-dire

$$\frac{\sin(\theta)}{2} \leqslant \frac{\theta}{2} \leqslant \frac{\tan(\theta)}{2}.$$

Comme $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin(\theta) > 0$ et $\cos(\theta) > 0$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient donc

$$\frac{2}{\tan(\theta)} \leqslant \frac{2}{\theta} \leqslant \frac{2}{\sin(\theta)}$$

puis

$$\cos(\theta) \leqslant \frac{\sin(\theta)}{\theta} \leqslant 1.$$

Par continuité du cosinus en 0, on a $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \cos(\theta) = 1$. Par encadrement, on a donc $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$. Par parité du sinus, nous obtenons la même limite en 0^- si bien que

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(\theta)}{\theta} = 1$$

Exercice 4. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est périodique et qui admet une limite finie en $+\infty$?

Correction : Notons $T > 0$ une période de f et notons ℓ la limite finie de f en $\mathbb{R}$. Si f n'est pas constante, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq \ell$. Considérons $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0) - \ell|}{2} > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, pour tout $x > A$, $|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$. Considérons $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 + nT > A$. On a alors

$$|f(x_0) - \ell| = |f(x_0 + nT) - \ell| \leqslant \varepsilon = \frac{|f(x_0) - \ell|}{2}.$$

C'est absurde. Ainsi f est constante égale à ℓ.

Exercice 7. Les fonctions suivantes sont-elles continues en tout point de $\mathbb{R}$? Si non, préciser les points de discontinuité.

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1) & \text{si } \ x > 1 \\ 0 & \text{si } \ x \leqslant 1 \end{cases}, \qquad g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{x + e^{-1/x}} & \text{si } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \end{cases},$$

$$h : x \longmapsto \begin{cases} \sin(x)\ln(-x) & \text{si } \ x < 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0 \\ x^{-3/2}(1 - \cos(2x)) & \text{si } \ x > 0 \end{cases}.$$

Correction : **A VENIR**

Exercice 8. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et continues en $x_0 \in I$. Nous définissons les fonctions $\phi = \min(f, g)$ et $\psi = \max(f, g)$ sur I par

$$\forall x \in I, \qquad \phi(x) = \min(f(x), g(x)) \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \max(f(x), g(x)).$$

Montrer que $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont continues en x_0.

On pourra écrire au préalable $\max(x, y)$ et $\min(x, y)$, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, en termes d'opérations élémentaires et de valeurs absolues.

Correction : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. On a

$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-y+x}{2} = x = \min(x,y)$$

et

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = y = \max(x,y).$$

Si f et g sont continues en $x_0 \in I$, alors les fonctions $\min(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$ et $\max(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ sont continues en x_0.

Exercice 9. La fonction de Dirichlet est la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$

1) Montrer que f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
   On pourra utiliser le fait que, pour tout réel x_0, il existe une suite de rationnels qui converge vers x_0.
2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{p\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^{2n}(p!x\pi)\right)$.
3) Étudier la continuité de la fonction $\varphi : x \in \mathbb{R} \longmapsto xf(x)$.

Correction :

1)
   - Soit $x_0 \in \mathbb{Q}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que f est continue en x_0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $x_n = x_0 + \dfrac{\pi}{n} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ de telle sorte que $f(x_n) = 0$. Puisque f est continue en x_0, on obtient que $0 = f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$ et donc $f(x_0) = 0$. C'est absurde étant donné que $x_0 \in \mathbb{Q}$. Par l'absurde, on obtient donc que f n'est pas continue en x_0.
   - Soit $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que f est continue en x_0. On a vu en cours (cf. chapitre 6) qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x_0. Puisque f est continue en x_0, on obtient que $1 = f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$ et donc $f(x_0) = 1$. C'est absurde étant donné que $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Par l'absurde, on obtient donc que f n'est pas continue en x_0.
2)
   - Soit $x \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = \frac{a}{b}$. Pour $p \geqslant b$, on a $p!x \in \mathbb{Z}$ donc $\cos^2(p!x\pi) = 1$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^{2n}(p!x\pi) = 1$ et donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^{2n}(p!x\pi)\right) = 1 = f(x)$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $\left|\cos^2(p!x\pi)\right| < 1$ (car si $\cos^2(p!x\pi) = 1$, alors $p!x\pi \equiv 0\,[\pi]$ donc $p!x \in \mathbb{Z}$ et donc x est rationnel). Nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^{2n}(p!x\pi) = 0$ et donc $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^{2n}(p!x\pi)\right) = 0 = f(x)$.
3) On montre de même que la fonction φ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}^*$. Par contre elle est continue en 0. En effet, puisque f est bornée par 1, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\varphi(x) - \varphi(0)| = |x|\, f(x) \leqslant |x|.$$

   Comme $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, on obtient par encadrement $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = \varphi(0)$. D'où la continuité de φ en 0.

Exercice 11. Notons $\mathcal{A} = \left\{g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R},\ g(x^2) = g(x)\right\}$.

1) Donner un exemple de fonction non constante appartenant à $\mathcal{A}$.
2) Soit f une fonction de $\mathcal{A}$ qui est continue en 0 et en 1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x^{1/2^n})$. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1) La fonction non constante $g_0 : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ est telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_0(x^2) = g_0(x)$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Raisonnons par récurrence. L'initialisation est immédiate. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x^{1/2^n})$. On a alors

$$f(x^{1/2^{n+1}}) = f\big(\sqrt{x^{1/2^n}}\big) = f\left(\big(\sqrt{x^{1/2^n}}\big)^2\right) = f(x^{1/2^n}) = f(x).$$

D'où le résultat par récurrence. Puisque la fonction f est continue en 1 et que $x^{1/2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on obtient $f(x) = f(x^{1/2^n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(1)$. Ainsi $f(x) = f(1)$.

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) = f(x^2) = f((-x)^2) = f(-x) = f(1)$. Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}^*$. Puisque f est continue en 0, on obtient $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(1)$. Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}$.
