Correction de quelques exercices de la feuille de TD 10

Exercice 2. Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Soit X la variable aléatoire finie à valeurs dans $[\![1, ab]\!]$ vérifiant

$$\forall k \in [\![1, ab]\!], \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que X soit bien une variable aléatoire réelle finie ? Calculer $\mathbb{E}(X)$ et déterminer a et b afin que $\mathbb{E}(X) = 3,5$.

Correction : Dans un premier temps il faut que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$, c'est-à-dire $b \geqslant a$. Un autre condition nécessaire est que $\displaystyle\sum_{k=1}^{ab} \mathbb{P}(X = k) = 1$. Ainsi $ab(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}) = 1$ et donc $b - a = 1$.

Réciproquement on vérifie que, si $a \in \mathbb{N}^*$ et $b = a + 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{ab} (\frac{1}{a} - \frac{1}{b}) = 1$ donc l'existence de la variable aléatoire X est avérée. On remarque en fait que X est alors une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, ab]\!]$. Ainsi $\mathbb{E}(X) = \dfrac{ab+1}{2} = \dfrac{a^2+a+1}{2}$. On a $\mathbb{E}(X) = \dfrac{7}{2}$ si et seulement si $a^2 + a + 1 = 7$, c'est-à-dire $(a-2)(a+3) = 0$. Ainsi $\mathbb{E}(X) = \dfrac{7}{2}$ si et seulement si $(a, b) = (2, 3)$.

Exercice 4. Un chercheur de l'université Paris-Sud se rend deux à trois fois par semaine à Paris (20 trajets sur le mois) avec le RER B. D'après des statistiques, un train sur trois accuse un retard. Quelle est la probabilité que ce francilien arrive en retard au plus cinq fois en un mois ?

Correction : Notons X le nombre de fois que le chercheur arrive en retard dans le mois. A chaque fois qu'il prend le train, il a une probabilité $1/3$ d'arriver en retard (succès) et une probabilité $2/3$ d'arriver à l'heure (échec). On peut donc considérer les trajets comme des expériences de Bernoulli de paramètres $1/3$. Elles sont identiques et on peut supposer qu'elles sont indépendantes. Il s'ensuit que X suit une loi binomiale de paramètre 20 et $1/3$.

La probabilité que le chercheur arrive au plus 5 fois en retard est donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leqslant 5) = \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^{5} \binom{20}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{20-k} \\
&= \frac{1}{3^{20}} \sum_{k=0}^{5} \binom{20}{k} 2^{20-k} \\
&= \frac{1}{3^{20}} \left(\binom{20}{0} 2^{20} + \binom{20}{1} 2^{19} + \binom{20}{2} 2^{18} + \binom{20}{3} 2^{17} + \binom{20}{4} 2^{16} + \binom{20}{5} 2^{15} \right) \\
&= \frac{2^{15}}{3^{20}} \Bigg(32 + 20 \cdot 16 + \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} \cdot 8 + \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 4 \\
&\qquad\qquad + \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2 + \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \Bigg) \\
&\approx 0,2972
\end{aligned}$$

Exercice 6. Pour animer une soirée, on a le choix entre deux groupes de rock : l'un composé de quatre musiciens et l'autre de six musiciens. La probabilité qu'un musicien soit indisponible est $p \in]0, 1[$, indépendamment des autres musiciens. Un groupe ne peut se produire que si la moitié au moins de ses musiciens est disponible. Quel groupe choisir ? ***Correction :*** Notons X_1 (resp. X_2) le nombre de musiciens absents dans le groupe 1 (resp. 2).

Le fait d'être absent (succès) ou à l'heure (échec) pour un musicien est une épreuve de Bernoulli de paramètre p, et cela indépendamment des autres musiciens. Nous en déduisons que X_1 suit une loi $\mathcal{B}(4,p)$ et X_2 une loi $\mathcal{B}(6,p)$. La probabilité que le groupe 1 se produise est

$$\begin{aligned}P_1 = \mathbb{P}(X_1 \leqslant 2) &= \sum_{k=0}^{2}\binom{4}{k}p^k(1-p)^{4-k} = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2 \\ &= (1-p)^2\big(1-2p+p^2+4p-4p^2+6p^2\big) \\ &= (1-p)^2\big(1+2p+3p^2\big)\end{aligned}$$

La probabilité que le groupe 2 se produise est

$$\begin{aligned}P_2 = \mathbb{P}(X_2 \leqslant 3) &= \sum_{k=0}^{3}\binom{6}{k}p^k(1-p)^{6-k} = (1-p)^6 + 6p(1-p)^5 + 15p^2(1-p)^4 + 20p^3(1-p)^3 \\ &= (1-p)^3\big(1-3p+3p^2-p^3+6p-12p^2+6p^3+15p^2-15p^3+20p^3)\big) \\ &= (1-p)^3\big(1+3p+6p^2+10p^3\big).\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}P_1 - P_2 &= (1-p)^2\big(1+2p+3p^2\big) - (1-p)^3\big(1+3p+6p^2+10p^3\big) \\ &= (1-p)^2\big(1+2p+3p^2-(1-p)\big(1+3p+6p^2+10p^3\big)\big) \\ &= (1-p)^2\big(1+2p+3p^2-1-3p-6p^2-10p^3+p+3p^2+6p^3+10p^4\big) \\ &= (1-p)^2\big(-4p^3+10p^4\big) \\ &= 2p^3(1-p)^2(5p-2).\end{aligned}$$

Ainsi :

- Si $p > \dfrac{2}{5}$, alors $P_1 - P_2 > 0$ donc on préférera le groupe 1.
- Si $p < \dfrac{2}{5}$, alors $P_1 - P_2 > 0$ donc on préférera le groupe 2.
- Si $p = \dfrac{2}{5}$, alors $P_1 = P_2$ et il n'y a pas de préférence

---

Exercice 7. Une urne U_1 contient 6 boules bleues et 5 rouges. Une urne U_2 contient 4 boules bleues et 8 boules rouges. On tire au hasard simultanément deux boules dans l'urne U_2 que l'on transfère dans l'urne U_1. Ensuite on tire une boule au hasard dans l'urne U_1 et on relève sa couleur.

1) Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de boules bleues transférées. Déterminer la loi de X.
2) Calculer la probabilité que la boule tirée dans l'urne U_1 soit bleue.
3) Calculer la probabilité que l'une au moins des boules transférées soit bleue sachant que la boule tirée est bleue.

Correction :

- Considérons Ω l'ensemble des tirages de deux boules dans l'urne U_2, puis d'une boule dans U_1, muni de $\mathcal{P}(\Omega)$ et de $\mathbb{P}$ l'équiprobabilité. On a $\operatorname{card}(\Omega) = \binom{12}{2}\cdot 13 = 66\cdot 13$. Nous avons $X(\Omega) = \{0,1,2\}$ et

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\operatorname{card}([X=0]}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\binom{8}{2}\cdot 13}{\binom{12}{2}\cdot 13} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33},$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{\operatorname{card}([X=1]}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}\cdot 13}{\binom{12}{2}\cdot 13} = \frac{32}{66} = \frac{16}{33},$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{\operatorname{card}([X=2]}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\binom{4}{2}\cdot 13}{\binom{12}{2}\cdot 13} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}.$$

- Notons B l'événement « Tirer une boule bleue dans U_1 ». La famille $([X=0],[X=1],[X=2])$ est un système complet d'événements donc la formule des probabilités totales entraîne que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}_{[X=0]}(B)\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}_{[X=1]}(B)\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}_{[X=2]}(B)\mathbb{P}(X=2)\\ &= \frac{6}{13}\frac{14}{33}+\frac{7}{13}\frac{16}{33}+\frac{8}{13}\frac{3}{33}=\frac{220}{429}.\end{aligned}$$

- Comme $\mathbb{P}_B$ est une probabilité, on a $\mathbb{P}_B(X\geqslant 1)=\mathbb{P}_B(X=1)+\mathbb{P}_B(X=2)$. La formule de Bayes entraîne que

$$\mathbb{P}_B(X\geqslant 1)=\frac{\mathbb{P}_{[X=1]}(B)\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(B)}+=\frac{\mathbb{P}_{[X=2]}(B)\mathbb{P}(X=2)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{34}{55}.$$

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![1,n]\!]$, avec $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k).$$

Correction : On a

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=k}^{n}\mathbb{P}(X=j)\right)=\sum_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n}\mathbb{P}(X=j)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j}\mathbb{P}(X=j)\right),$$

d'après la formule de Fubini. Nous en déduisons que

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k)=\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(X=j)\left(\sum_{k=1}^{j}1\right)=\sum_{j=1}^{n}j\mathbb{P}(X=j)=\mathbb{E}(X).$$

Exercice 12. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $c\in\mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telle que

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\qquad \mathbb{P}(X=k)=\frac{c}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Déterminer c puis calculer $\mathbb{E}(X+1)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X+1))$ et $\mathbb{V}(X)$.

Correction : Il faut et il suffit que c soit positif et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{c}{k+1}\binom{n}{k}$. Or on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}\quad \text{(changement de variable } j=k+1)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}-1\right)=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi $c=\dfrac{n+1}{2^{n+1}-1}$. On calcule ensuite :

- D'après la formule de transfert $\mathbb{E}(X+1)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n}c\binom{n}{k}=c\,2^n$. Ainsi, par linéarité,

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X+1)-1=c\,2^n-1=\frac{2^n(n+1)}{2^{n+1}-1}-1=\frac{2^n(n+1)-2^{n+1}+1)}{2^{n+1}-1}=\frac{2^n(n-1)+1}{2^{n+1}-1}.$$

- D'après la formule de transfert
$$\mathbb{E}(X(X+1))=\sum_{k=0}^{n}k(k+1)\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n}ck\binom{n}{k}=c\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}=cn\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}=cn\,2^{n-1}.$$
Ainsi, par linéarité, $\mathbb{E}(X^2)=\mathbb{E}(X(X+1))-\mathbb{E}(X)=cn\,2^{n-1}-c\,2^n+1$. Ainsi
$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=cn\,2^{n-1}-c\,2^n+1-(c\,2^n-1)^2=cn\,2^{n-1}-c^2\,4^n+c\,2^n.$$

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\,]0,1[$. Les résultats de X sont affichés par un compteur détraqué :

- le compteur affiche la valeur correcte de X lorsque X prend une valeur comprise entre 1 et $n-1$.
- le compteur affiche un nombre tiré uniformément entre entre 1 et $n-1$ lorsque $X=0$ ou n.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché sur le compteur.

1) Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
2) Quelle est la probabilité que le compteur Y affiche la valeur prise par X ?
3) On suppose que n est pair. Sachant que le compteur affiche la valeur $n/2$, quelle est la probabilité que $X=n/2$?

Correction :

1) On a $Y(\Omega)=[\![1,n-1]\!]$. Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événement associé à X (i.e. à la famille $([X=j])_{0\leqslant j\leqslant n}$) donne :
$$\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{j=0}^{n}\mathbb{P}_{[X=j]}(Y=k)\mathbb{P}(X=j).$$
Nous avons :
   - $\mathbb{P}_{[X=0]}(Y=k)=\dfrac{1}{n-1}$ puisqu'on, si $X=0$, on décide alors d'attribuer à Y un nombre choisi uniformément entre 1 et $n-1$.
   - $\mathbb{P}_{[X=n]}(Y=k)=\dfrac{1}{n-1}$ puisqu'on, si $X=n$, on décide alors d'attribuer à Y un nombre choisi uniformément entre 1 et $n-1$.
   - $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y=k)=1$.
   - $\mathbb{P}_{[X=j]}(Y=k)=0$ si $j\in[\![1,n-1]\!]\backslash\{k\}$.

   Ainsi, dans la somme ci-dessus, seuls trois termes sont non nuls :
$$\mathbb{P}(Y=k)=\frac{1}{n-1}\mathbb{P}(X=0)+1\cdot\mathbb{P}(X=k)+\frac{1}{n-1}\mathbb{P}(X=n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}+\frac{p^n+(1-p)^n}{n-1}.$$
On a ensuite
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y)&=\sum_{k=1}^{n-1}k\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{p^n+(1-p)^n}{n-1}\\&=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}-0-n\binom{n}{n}p^n(1-p)^{n-n}+\frac{p^n+(1-p)^n}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}k\\&=np-np^n+\frac{p^n+(1-p)^n}{n-1}\frac{(n-1)n}{2}=n\left(p+\frac{(1-p)^n-p^n}{2}\right).\end{aligned}$$
2) On a $\mathbb{P}(Y=X)=1-\mathbb{P}(Y\neq X)=1-\mathbb{P}(X\in\{0,n\})=1-p^n-(1-p)^n$.
3) La formule de Bayes nous assure que
$$\mathbb{P}_{[Y=n/2]}\left(X=n/2\right)=\frac{\mathbb{P}_{[X=n/2]}\left(Y=n/2\right)\mathbb{P}\left(X=n/2\right)}{\mathbb{P}\left(Y=n/2\right)}=\frac{\dbinom{n}{n/2}p^{n/2}(1-p)^{n/2}}{\dbinom{n}{n/2}p^{n/2}(1-p)^{n/2}+\dfrac{p^n+(1-p)^n}{n-1}}.$$
