Lycée Carnot ECS1B – 2018/2019

Exercices de Mathématiques

Deuxième semestre

Matthias Gorny

Table des matières

Feuille d'exercice n° 19

Analyse asymptotique

Exercice 1 – Vitesses de convergence. (★)

1) Montrer que les suites de termes généraux $n\ln(n)$, $\dfrac{n^2}{(\ln(n))^{10!}}$, $\dfrac{3^n}{n^3}$, $n^{3/2}$, $2^n\ln(n)$ tendent toutes vers $+\infty$. Classez-les de la plus lente à la plus rapide (c'est-à-dire par ordre croissant pour la négligeabilité).
2) Montrer que les suites de termes généraux $\dfrac{(\ln(n))^2}{n^2}$, $n^{1000}e^{-n}$, $\dfrac{n}{4^n}$, $\dfrac{1}{n^2(\ln(n))^{100}}$, $\dfrac{1}{n^2}$ tendent toutes vers 0. Classez-les de la plus rapide à la plus lente (c'est-à-dire par ordre croissant pour la négligeabilité).

Exercice 2. (★) A-t-on $o(x^3) \underset{0}{=} o(x^2)$ ou $o(x^2) \underset{0}{=} o(x^3)$? Même question au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3. (★) Parmi les fonctions f et g suivantes, laquelle est négligeable devant l'autre ?

1) $f : x \longmapsto x\sin(x)\tan(x)$ et $g : x \longmapsto (e^x-1)^2$ en 0,
2) $f : x \longmapsto (\ln(x))^2$ et $g : x \longmapsto x\ln(\ln(x))$ en $+\infty$,
3) $f : x \longmapsto x^5$ et $g : x \longmapsto e^{-1/\sqrt{x}}$ en 0^+,
4) $f : x \longmapsto \ln(\sqrt{x})\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ et $g : x \longmapsto \ln(x^3)\sin^2\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ en $+\infty$.

Exercice 4. (★ à ★★) Calculer la limite (si elle existe) des suites de terme général :

1) $n!\sin\left(\dfrac{1}{n^n}\right)$,
2) $3^n\ln\left(1-e^{-n}\right)$,
3) $\dfrac{\ln(2019n^2+4n+5)}{\ln(n)}$,
4) $n^2\ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)$,
5) $n^2\left(\sqrt[n]{1+n}-\sqrt[n]{n}\right)$,
6) $n\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}\right)$,
7) $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$,
8) $\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{n^3}\right)^{1/n}}{1-\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{1/n}}$.

Exercice 5. (★ à ★★) Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$,
2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}e^{-1/\sqrt{x}}$,
3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{5x+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{3x+1}}{7x+4}\right)$,
4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\sin\left(\frac{5x^2}{7x^3+3x^2+1}\right)$,
5) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(1+x^2)\left(e^{\cos(1/x)}-e\right)$,
6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin(x)\ln(\tan(x))$,
7) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\ln(1-x)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$,
8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2(x)}{\tan(x)(1-\cos(x))}$,
9) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}-\sqrt[3]{x}\right)$,
10) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.

Exercice 6. (★) 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x^2+x-2}}$

2) Montrer qu'elle est prolongeable par continuité en 1.

3) Ainsi prolongée, est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 7. (★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e$.

Exercice 8. (★) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $k \in [\![0, n-2]\!]$, $0 \leqslant \dfrac{k!}{n!} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$.
En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9. (★) 1) Donner un équivalent de $u_n = -\dfrac{2019}{\pi^n} + o\left(e^{-2n}\right) + o\left(\dfrac{1}{\pi^n}\right)$ quand $n \to +\infty$.

2) Donner un équivalent de $v_n = \sqrt{2\pi n} - \dfrac{n^3}{\ln(n)} - 2019 + \ln(n) + 2n^3 + o(n^3) + o(1)$ quand $n \to +\infty$.

3) Donner un équivalent de $f(x) = 2019 + x - o(x) - x^2 + o(x^3) + x^4 + o(1)$ quand $x \to 0$ puis $x \to +\infty$.

4) Donner un équivalent de $g(x) = \sqrt{x} + o(7x\ln(x)) + x^5 - 5x^5\ln(x) + o(x^5)$ quand $x \to 0$ puis $x \to +\infty$.

Exercice 10. (★ à ★★★) Donner un équivalent simple et la limite des suites de terme général :

1) $\pi n - 4\ln(n)$,
2) $\sqrt{n^2+3n} - n$,
3) $\dfrac{n^{100!} - 10\,n! + 100^n}{10n + \sin(n) + \sqrt{n}\ln(n) + n^{100}e^{-n}}$,
4) $1 - 2n^4 + 9n^3\cos(n) + 7n^5\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$,
5) $\sin\left(\dfrac{2n^2-2n+1}{3n^3+4n+5}\right)$,
6) $\dfrac{\ln(n)}{n+1} - \dfrac{\ln(n+1)}{n}$,
7) $\dfrac{4-3n^2}{\sqrt[3]{4n^5-n^2+6}}$,
8) $\ln\left(\cos\left(\tan\left(3e^{-n}\right)\right)\right)$,
9) $\dfrac{1}{n} + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
10) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{3^k}$,
11) $n - \sqrt[4]{n^4\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)}$,

Exercice 11. (★ à ★★) Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{\ln(x)}\right)$ en $+\infty$.
2) $x \longmapsto \mathrm{Arctan}(\ln(x))$ en 1.
3) $x \longmapsto (x^4-3x^2+7)e^{1/x}$ en $+\infty$,
4) $x \longmapsto \sqrt[7]{x} - 1$ en 1,
5) $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{8x^5+3x^4+5x+1}{2x^3-5x^2+2019}}$ en $+\infty$,
6) $\ln(3-x) - \ln(\sqrt{5}-x)$ en $-\infty$,
7) $x \longmapsto \sqrt{6+x} - 3$ en 3,
8) $x \longmapsto \dfrac{x^2+\ln(x)}{5+xe^{-x}}$ en 0^+ puis en $+\infty$,
9) $x \longmapsto x\sqrt[5]{\ln(1+x)}$ en 0^+ puis en $+\infty$,
10) $x \longmapsto \ln(2\sin(x))$ en $\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 12. (★★★) Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}.$$

On pourra commencer par déterminer un équivalent de $\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2} - 1$ *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Exercice 13. (★★) A l'aide de sommes de Riemann, calculer des équivalents des suites suivantes :

$$1)\ \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}, \quad \alpha > 0, \qquad 2)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}, \qquad 3)\ \sum_{k=1}^{n} k\cos\left(\frac{\pi k^2}{2n^2}\right).$$

Exercice 14 – D'après l'oral ESCP 2006. (★★) A l'aide du théorème d'encadrement et d'un équivalent usuel, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\ln(k)}{n^2}\right).$$

Exercice 15. (★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Montrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
2) En déduire que

$$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \qquad \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1).$$

3) Donner un équivalent simple de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 16. (★★) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$.
2) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et si $a < b$, alors $u_n^a \underset{+\infty}{=} o(u_n^b)$.
3) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et si $0 < a < b$, alors $a^{u_n} \underset{+\infty}{=} o(b^{u_n})$.
4) $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Exercice 17. (★★) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs telles que $v_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+\backslash\{1\}$ ou $+\infty$. Montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(u_n)$.

Exercice 18. (★★★)

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ que l'on notera x_n.
2) Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer qu'elle tend vers $+\infty$.
3) Montrer que $\ln(x_n) \underset{+\infty}{=} o(x_n)$ et déterminer un équivalent simple de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4) Montrer que $y_n = x_n - n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
5) Montrer que $x_n \underset{+\infty}{=} n - \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.
   On parle de développement asymptotique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Feuille d'exercice n° 20

Dérivées successives et formules de Taylor

Exercice 1. ($\bigstar$) Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ sur des intervalles (à préciser) et calculer leurs dérivées successives.

$$1)\ x \longmapsto \frac{1}{3+x}, \qquad 2)\ x \longmapsto \ln(3+x), \qquad 3)\ x \longmapsto e^{-3x}, \qquad 4)\ x \longmapsto x^2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Exercice 2. ($\bigstar$) Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x \sin(x)$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(x) = 2^{n/2} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

Exercice 3. ($\bigstar$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \longmapsto x^{n-1}\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \longmapsto (x-a)^n(x-b)^n$.
   b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 4. ($\bigstar\bigstar$) Soit $x \in \mathbb{R}\Big\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \dfrac{\tan^{(n)}(x)}{n!}$. Montrer que

$$\forall n \geqslant 1, \qquad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Exercice 5. ($\bigstar\bigstar$) Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}.$$

2) En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. ($\bigstar\bigstar$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $n+1$ points $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ vérifiant $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n+1})$. Montrer qu'il existe $c \in \left]a_1, a_{n+1}\right[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Application : Si P désigne un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus $n+1$ solutions.

Exercice 7. ($\bigstar\bigstar$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les fonctions n fois dérivables telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$.

Exercice 8. ($\bigstar$) Factoriser le polynôme $X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 4X^2 + 13X + 6$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant qu'il possède une racine de multiplicité au moins 3.

Exercice 9. ($\bigstar$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme

$$P_n = (n-1)X^{2n} - 2(2n-1)X^n + 2n^2X - (2n^2 - 3n + 1).$$

Exercice 10. ($\bigstar$) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left((X-a)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
On exprimera les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base en fonction des dérivées successives de P en a.

Exercice 11. (★) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels dont toutes les dérivées successives en a sont strictement positives. Montrer que P ne s'annule pas sur $[a, +\infty[$.

Exercice 12. (★) En appliquant une formule de Taylor à la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 13. (★) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 + \dfrac{x}{5} - \dfrac{2x^2}{25} \leqslant \sqrt[5]{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{5} - \dfrac{2x^2}{25} + \dfrac{6x^3}{125}$.

Exercice 14. (★) Montrer que, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

Exercice 15. (★) Déterminer les maxima et minima locaux des fonctions suivantes :

$$1)\ x \longmapsto x^5 - 15x^3 + 12, \qquad\qquad 2)\ x \longmapsto \ln\left(\frac{2019x}{1+x^2}\right).$$

Exercice 16. (★★) Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \sin(xt^2)\,dt$.

1) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2) a) Montrer que, pour tous $t \in [0,1]$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\sin(yt^2) - \sin(xt^2)\right| \leqslant |y-x|$.
   b) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3) a) Montrer que, pour tous $t \in [0,1]$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\sin(yt^2) - \sin(xt^2) - (y-x)t^2\cos(xt^2)\right| \leqslant \frac{1}{2}|y-x|^2.$$

   b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_0^1 t^2\cos(xt^2)\,dt$.

Exercice 17. (★★★) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. Notons $M_0 = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$. L'objectif de cet exercice est de montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et d'obtenir une majoration de $M_1 = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ à partir de M_0 et M_2.

1) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$,

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leqslant \frac{M_2h^2}{2}, \qquad \text{et} \qquad \left|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\right| \leqslant \frac{M_2h^2}{2}.$$

2) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2h}{2}$.
3) En déduire que f' est bornée et que $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 18. (★★★) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle qu'il existe $a > 0$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{n!}{a^n} \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(0) = 0.$$

1) Montrer que f est nulle sur $]-a, a[$ puis sur $\left]-\dfrac{a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right[$.
2) Montrer que f est la fonction nulle.

Feuille d'exercice n° 21

Développements limités

I Calculs de développements limités

Exercice 1. (★) En utilisant l'exercice 4 de la feuille d'exercice n° 20, montrer que

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8).$$

Exercice 2. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1) Soit f une fonction paire sur $]-a, a[$ admettant un $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$: $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k + o(x^{2n+1})$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_{2k+1} = 0$.
2) Soit f une fonction impaire sur $]-a, a[$ admettant un $\mathrm{DL}_{2n}(0)$: $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k + o(x^{2n})$. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_{2k} = 0$.

Exercice 3. (★) Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ afin que $e^x - \dfrac{1+ax}{1+bx} \underset{0}{=} o(x^2)$.

Exercice 4. (★) Déterminer le développement limité en 0 des fonctions suivantes à tout ordre :

$$1)\ x \longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad 2)\ x \longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2x}, \quad 3)\ x \longmapsto (1-x)\sin(x), \quad 4)\ x \longmapsto x\cos(x) - \sin(x).$$

Exercice 5. (★ à ★★) Déterminer les développements limités en 0 des fonctions suivantes à l'ordre indiqué. On montrera que ces fonctions sont dérivables en 0 et on précisera leur dérivée en 0.

1) $x \longmapsto \sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[6]{1+4x}$ à l'ordre 3,
2) $x \longmapsto \sin(x)\cos(x)$ à l'ordre 6,
3) $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)$ à l'ordre 5,
4) $x \longmapsto x\, e^{x^2} \sin(x)$ à l'ordre 4,
5) $x \longmapsto (1+x^2)\cos(x)$ à l'ordre 6,
6) $x \longmapsto \ln(1-x^2) - 2\cos(x)$ à l'ordre 4,
7) $x \longmapsto \cos(x)\sqrt[5]{1+x}$ à l'ordre 3,
8) $x \longmapsto \dfrac{e^x}{1+x}$ à l'ordre 4,
9) $x \longmapsto \dfrac{2}{1-x+x^3}$ à l'ordre 5,
10) $x \longmapsto e^{(1-x)^2}$ à l'ordre 3,
11) $x \longmapsto \ln(1+x-x^3)$ à l'ordre 4,
12) $x \longmapsto \cos(x-x^2)$ à l'ordre 5,
13) $x \longmapsto \sin(x)\,\mathrm{Arctan}(x)$ à l'ordre 5,
14) $x \longmapsto \dfrac{\cos^2(x)}{1+3x+x^2}$ à l'ordre 5,
15) $x \longmapsto (\ln(1-x))^3$ à l'ordre 6,
16) $x \longmapsto \sin^6(x)$ à l'ordre 9,
17) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x-x^3)}{\sqrt{1-x+2x^2}}$ à l'ordre 4,
18) $x \longmapsto e^{-1/x^4}$ à l'ordre 2019.

Exercice 6. (★) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Quel sens peut-on donner à l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$?
Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 6.

Exercice 7. (★) Déterminer les développements limités suivantes :

1) $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ en 1 à l'ordre 3,
2) $x \longmapsto \ln(2+x)$ en -1 à l'ordre 5,
3) $x \longmapsto \cos(2x)$ en $\dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre 6,
4) $x \longmapsto 3 - \sqrt{5-2x} - x$ en 2 à l'ordre 3.

II Applications à la recherche d'équivalents

Puisque la composition (et l'inversion) de développement limité est censée être hors-programme, on pourra dans un premier temps mettre certaines expressions sous un même dénominateur et/ou factoriser par des termes bien choisis pour faire apparaître des équivalents usuels.

Exercice 8. (★ à ★★) Déterminer des équivalents simples en 0 des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto e^x - e^{-x}$, $x \longmapsto e^{x^2} - \cos(x)$,
2) $x \longmapsto x + \text{Arctan}(x) - 2\sin(x)$,
3) $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(1+x)} - \dfrac{1}{\sin(x^2)}$,
4) $x \longmapsto \dfrac{1}{x}\left(\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}\right)$,
5) $x \longmapsto (1+x)^{\ln(x)/x} - x$,
6) $x \longmapsto x^x - (\sin(x))^x$.

Exercice 9. (★ à ★★) Déterminer des équivalents simples des suites de terme général :

1) $e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$,
2) $\sqrt{n(1+4n)} - 2n - \dfrac{1}{4}$,
3) $-2 + (2n+1)\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$,
4) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$,
5) $3n - 2n\cos\left(n^{-3/2}\right) - \sqrt[3]{3+n^3}$,
6) $\dfrac{1}{n} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n\ln(n)}$.

III Applications à la recherche de limites

Exercice 10. (★★) Déterminer les limites en 0 (si elles existent) des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{e^x}{\ln(1+x)}$,
2) $x \longmapsto \dfrac{2}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{1-\cos(x)}$,
3) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt[5]{1+2x} - \sqrt[7]{1-3x}}{\tan(x)}$
4) $x \longmapsto \dfrac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - x}$

Exercice 11. (★) Soit f une fonction de classe C^2 au voisinage de 0. Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(5x) - 3f(4x) + 7f(x) - 5f(0)}{x^2}.$$

Exercice 12. (★★) Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \tan^4(x) + x^2 - e^{x^2}}{\sqrt[5]{1+x+x^2} - 1 + e^{-1/x}}\sqrt{\frac{2x^2 - 3x^3}{x^9 + 8x^2}}$,
2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^4\left(2\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \ln(n+1) - \ln(n-1) + 2\ln(n) - 2e^{1/n^4}\right)$,
3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$,
4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x^{2+1/x^3} - x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$,
5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^{x^2-x} - 1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$.

Exercice 13. (★★★) A l'aide de développements limités, montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sin(2x)} - \dfrac{\cos(x)}{2x}$ sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0.

Exercice 14. (★★★)

1) Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est de classe C^1 (et même deux fois dérivable) sur $I =]-\pi, \pi[$.
2) Déterminer l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f et donner la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.

IV Développements asymptotiques et étude d'asymptotes

Exercice 15 – Arctan au voisinage de $+\infty$. (★★)

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
2) Donner le développement asymptotique de $x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}$ à l'ordre 7 en $+\infty$.
3) Donner un équivalent de $\big(\operatorname{Arctan}(nu_n)\big)^n$ en $+\infty$ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite strictement positive.
4) Montrer que la courbe représentative de $x \longmapsto (x+1)e^{1/x}\operatorname{Arctan}(x)$ admet des asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation (on précisera la position de la courbe par rapport à ces deux asymptotes au voisinage de $+\infty$).

Exercice 16. (★ à ★★) Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation. On précisera également la position de la courbe par rapport à l'asymptote au voisinage de $+\infty$.

1) $x \longmapsto (2x-1)e^{-3/x}$,
2) $x \longmapsto \sqrt[3]{8x^3+7x^2-3x+1}$,
3) $x \longmapsto \sqrt{x^4+2x+5} - x^2e^{1/x}$,
4) $x \longmapsto (x^2+2)\ln\left(1-\dfrac{3}{x}\right)$,
5) $x \longmapsto \dfrac{x^5(1-e^{-1/x})}{(1+x)^3}$.

Exercice 17. (★★★)

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans $\left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ que l'on notera x_n.
2) Déterminer un équivalent simple de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = \dfrac{\pi}{2} + n\pi - x_n$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$.
   b) En déduire un équivalent simple de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   c) Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} a_n + b_n + o(b_n)$ avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des suites que l'on précisera. On parle de développement asymptotique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 18. (★★★)

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $x_n + \sqrt[3]{x_n} = n$.
2) Montrer que $x_n \underset{+\infty}{\sim} n$.
3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = x_n - n$. Montrer que $y_n \underset{+\infty}{\sim} -\sqrt[3]{n}$.
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $z_n = y_n + \sqrt[3]{n}$. Déterminer un équivalent de z_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) En déduire un développement asymptotique à trois termes de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Feuille d'exercice n° 22

Séries numériques

I Étude de la nature de séries

Exercice 1. (★) Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes :

$$1)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^2(-1)^n}{n!}, \qquad 2)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{n(n-1)7^n}{(n+1)!}, \qquad 3)\ \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n-1}\frac{n-1}{3^n}, \qquad 4)\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2+n-3}{5^{n-1}}.$$

Exercice 2. (★) Justifier que $0,99999999999999999999999999999999999999999999999999999999999\cdots = 1$.

Exercice 3. (★) Trouver une fraction dont le développement décimal est $12,1212121212121212121212121212121212\ldots$

Exercice 4. (★ à ★★) Étudier la convergence des séries de terme général

1) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4n}\right)$,
2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3-1}}$,
3) $\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+3)}}$,
4) $\dfrac{\cos(3^n)}{4n^2-3n+6}$,
5) $\dfrac{1}{n\cos^2(n)}$,
6) $1-\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n^3}}$,
7) $\dfrac{\pi^2}{n}+1-\cos\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$,
8) $n\ln(n)e^{-\sqrt{n}}$,
9) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,
10) $\dfrac{(-1)^n n!}{n^n}$,
11) $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$,
12) $\ln\left(1-\dfrac{1}{n+5}\right)$,
13) $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$,
14) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,
15) $1-\dfrac{1}{\sqrt[n]{e}}$,
16) $\dfrac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$,
17) $\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^3}$,
18) $\sqrt{\tan\left(\dfrac{1}{2019+n\sqrt{n}}\right)}$

Exercice 5. (★) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.

On pourra déterminer $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+1}+\dfrac{c}{n+2}$.

Exercice 6. (★) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(\frac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 7. (★★) Étudier la convergente absolue et la convergence des séries suivantes

$$1)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right), \qquad 2)\ \sum_{n\geqslant 1}\sin\left(\frac{(-1)^n\pi}{3n}\right), \qquad 3)\ \sum_{n\geqslant 2}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}.$$

Indication : si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la suite des sommes partielles alors, pour montrer la convergence de ces séries, on pourra essayer de prouver que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Ces séries sont dites alternées. L'étude générale des séries alternées (cf. exercice 16) n'est pas au programme d'ECS mais la méthode d'étude est standard et il faut la connaitre.

Exercice 8. (★★) Étudier la nature des séries suivantes en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$1)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} n\sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+n^\alpha}}\right), \qquad 2)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha, \qquad 3)\ \sum_{n\geqslant 1} \exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right), \qquad 4)\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha^n}{1+\alpha^{2n}}.$$

Exercice 9. (★) On considère la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles.

1) Montrer que cette série converge. Notons S sa somme.
2) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|S-S_n| \leqslant 2^{-n}$.
3) Écrire un programme en `Scilab` qui prend un réel ε en entrée et qui calcule une valeur approchée de S à ε-près.

Exercice 10 – Constante d'Euler. (★) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, notons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et posons $v_n = H_n - \ln(n)$.

1) Quelle est la nature de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2) En étudiant la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(v_{n+1}-v_n)$, montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel que l'on note γ (et que l'on appelle constant d'Euler).
3) Montrer que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+o(1)$.

Exercice 11 – Séries de Bertrand. (★★) On appelle série de Bertrand toute série de la forme

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}, \qquad \text{avec} \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

1) Pour quelles valeurs de (α,β), la série diverge-t-elle grossièrement ?
2) Supposons que $\alpha>1$. Montrer que, pour tout $\beta\in\mathbb{R}$, la série converge.
3) Supposons que $\alpha<1$. Montrer que, pour tout $\beta\in\mathbb{R}$, la série diverge.
4) Supposons que $\alpha=1$ et $\beta\leqslant 0$. A l'aide d'une minoration, montrer que la série diverge.
5) Supposons que $\alpha=1$ et $\beta>0$.
   a) Déterminer une primitive de la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t(\ln(t))^\beta}$ sur $]1,+\infty[$.
   b) Soit $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Comparer la somme partielle $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_2^n f(t)\,dt$.
   On pourra utiliser la technique vue en cours pour la nature des séries de Riemann.
   c) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln(n))^\beta}$ en fonction de β.

Exercice 12 – Formule de Stirling. (★★★) L'objectif de cet exercice est de montrer que $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{\sqrt{n}n^n}{n!e^n}$ et $v_n=\ln(u_n)$.

1) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1/2}$.
2) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(v_{n+1}-v_n)$ converge.
3) En déduire qu'il existe $C>0$ tel que $n! \underset{+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.
4) Montrer que $C=\sqrt{2\pi}$.
   On utilisera la formule de Wallis (montré dans le DM n^o 9) : $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}$.

Exercice 13. (★★) A l'aide de la formule de Stirling,

1) donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^{n+\gamma}}{n!a^n}$ en fonction de $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

2) donner un équivalent simple des suites de termes généraux

$$u_n = \binom{2n}{n}, \qquad v_n = \ln(n!), \qquad \text{et} \qquad w_n = \sqrt[n]{n!}.$$

On pourra s'aider de l'exercice 17 du TD n^o^ 19.

II Exercices théoriques

Exercice 14. (★★) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs telle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ convergente. Que peut-on dire sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)$?

Exercice 15. (★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. Montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{1+u_n}$ ont même nature.

Exercice 16 – Critère des séries alternées. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs, décroissante et de limite nulle.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n u_n$ converge et que sa somme S vérifie $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Notons $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes de la série. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Exercice 17 – Critère de D'Alembert. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

1) Montrer que, si $\lambda < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
On pourra comparer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec le terme général d'une suite géométrique.

2) Montrer que, si $\lambda > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

3) Montrer que, si $\lambda = 1$, alors on ne peut pas conclure en général.

Exercice 18 – Critère de Cauchy. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

1) a) Montrer que, si $\lambda < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   b) Montrer que, si $\lambda > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   c) Montrer que, si $\lambda = 1$, alors on ne peut pas conclure en général.

2) (★★★) Montrer que, si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda$. La réciproque est-elle vraie ? Quel est le critère le plus « puissant » entre celui de Cauchy et celui de D'Alembert.

Exercice 19 – Règle de Raab-Duhamel. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. Supposons qu'il existe $(\alpha, c) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$. Étudier la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (v_{n+1} - v_n)$.

   b) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n^\alpha}$.

   c) En déduire les valeurs de α pour lesquelles la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

2) Quelques applications :

   a) Soient x et y deux réels strictement positifs. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n + y)u_{n+1} = (n + x)u_n$. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

   b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} x^{H_n}$ où $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne la série harmonique.

Exercice 20 – Produits infinis. (★★★) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite telle que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \neq 0$. On appelle produit infini de terme général u_n, et on note $\prod_{n\geqslant n_0} u_n$, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k.$$

Si la suite $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers un réel non nul, on dit que le produit $\prod_{n\geqslant n_0} u_n$ est bien convergent et la limite est appelée le produit infini des u_n et noté $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

1) Supposons que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels de $]0, 1]$. Montrer que son produit infini $(P_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers un réel de $[0, 1]$.

2) Étudier la convergence du produit infini $(P_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{1}{n}, \qquad u_n = \frac{n}{n+1}, \qquad u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}, \qquad u_n = e^{-n^2}, \qquad u_n = e^{-1/n^2}.$$

3) Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite de réels de $]0, 1]$.

   a) Montrer que, si la produit $\prod_{n\geqslant n_0} u_n$ est bien convergent, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ tend vers 1.
   La réciproque est-elle vraie ?

   b) Montrer que le produit $\prod_{n\geqslant n_0} u_n$ est bien convergent si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant n_0} (1 - u_n)$ converge

Feuille d'exercice n° 23

Probabilités sur un univers quelconque

I Tribus et événements

Exercice 1. (★) Énumérer les tribus possibles des ensembles $\{a\}$, $\{a,b\}$ et $\{a,b,c\}$.

Exercice 2. (★) Soit $\Omega = [\![1,6]\!]$. Déterminer la tribu de Ω engendrée par $\{\{5,6\},\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$.

Exercice 3. (★★) Soit $\mathcal{A}$ une tribu de $\mathbb{R}$ contenant tous les segments. Montrer qu'elle contient tous les intervalles.

Exercice 4. (★) On lance une pièce de monnaie une infinité de fois et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note T_n : « obtenir Pile au $n^{\text{ième}}$ lancer ». Décrire avec des phrases les événements $\displaystyle E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{p\geqslant n} T_p$ et $\displaystyle F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} T_p$.

II Calcul de probabilités

Exercice 5. (★) Parmi les applications $\mathbb{P}$ listées ci-dessous, déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ (lorsque c'est possible) pour que $\alpha\,\mathbb{P}$ soit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$:

1) $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$,
2) $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \dfrac{1}{(n+1)^2}$,
3) $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \dfrac{1}{\pi^n}$,
4) $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto 1-\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$,
5) $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \dfrac{5^n}{n!}$,
6) $\mathbb{P} : \{n\} \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Exercice 6. (★★) Une urne contient une boule bleue et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité que n premières boules tirées soient rouges ?
2) Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

Exercice 7. (★★) Dans une population, on suppose que la probabilité qu'une famille ait n enfants est $p_n = \alpha\dfrac{2^n}{n!}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il est équiprobable qu'un enfant soit une fille ou un garçon

1) Déterminer la valeur de α.
2) Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.
3) Quelle est la probabilité pour famille ayant exactement une fille comporte deux enfants ?
4) Quelle est la probabilité pour qu'une famille ait exactement deux filles sachant qu'elle a exactement deux garçons ?

Exercice 8. (★★) Eric propose à Layla un pari au jeu de pile ou face. Au premier tour du pari, Layla lance une pièce de monnaie bien équilibrée. Si la pièce tombe sur Pile, Layla gagne le pari. Sinon elle continue avec la règle suivante : si le jeu n'est toujours pas terminé au $n^{\text{ième}}$ tour, avec $n \in \mathbb{N}^*$, elle lance n pièces de monnaie équilibrées et l'emporte si toutes les pièces tombent sur Pile. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n l'événement « Layla n'a toujours pas remporté le pari d'Eric à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tour ».

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$.
2) Montrer que la suite $\big(\ln \mathbb{P}(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3) Conclure qu'Eric a une probabilité non nulle de gagner.

Exercice 9. (★★) On lance deux dés équilibrés. Si la somme des dés vaut 5 ou 7, alors on arrête. Sinon on recommence cette expérience jusqu'à ce qu'une somme valant 5 ou 7 apparaisse.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons E_n l'événement « on obtient 5 au $n^{\text{ième}}$ lancer et on n'avait obtenu ni 5 ni 7 précédemment » . Calculer $\mathbb{P}(E_n)$.
2) Quelle est la probabilité qu'on arrête le jeu en obtenant une somme de 5 ?
3) Quelle est la probabilité qu'on arrête le jeu en obtenant une somme de 7 ?
4) Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais ?

Exercice 10. (★) Une puce parcourt un triangle équilatéral ABC de la façon suivante : si elle est au sommet A ou au sommet B, elle saute vers un des trois sommets de façon équiprobable (elle peut sauter sur place). Si elle saute sur C, elle se dirige toujours vers A. Initialement elle se trouve au sommet A. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives que la puce soit au sommet A, B, C à l'issue du $n^{\text{ième}}$ saut.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $X_n = {}^t\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.
2) Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}MP$.
3) En déduire une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. (★★) Soient $p \in]0,1[$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, N]\!]$. Un joueur possède k euros et désire en avoir N. Pour cela il effectue une série de paris mutuellement indépendants. A chaque pari il gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $q = 1 - p$. Il continue de jouer jusqu'à ce qu'il ait accumulé N euros (incluant la mise de départ) ou jusqu'à ce qu'il soit ruiné. On note r_k la probabilité que le joueur finisse le jeu ruiné.

1) Calculer r_0 et r_N. Montrer ensuite que $r_k = pr_{k+1} + qr_{k-1}$ lorsque $k \notin \{0, n\}$.
   On pourra introduire l'événement G : « le joueur gagne son premier pari ».
2) Montrer que, si $p \neq 1/2$, alors $r_k = \dfrac{(\frac{q}{p})^k - (\frac{q}{p})^N}{1 - (\frac{q}{p})^N}$.
3) Traiter le cas où $p = 1/2$.
4) Comment évolue cette probabilité lorsque N tend vers $+\infty$. Commenter.

Exercice 12 – Paradoxe du singe savant. (★★) Le paradoxe du singe savant est un théorème selon lequel un singe (immortel) qui tape indéfiniment et au hasard sur le clavier d'une machine à écrire pourra presque sûrement écrire *Hamlet* de Shakespeare (ou tout autre texte d'une longueur finie d'ailleurs).

Plus généralement supposons que la machine à écrire dispose de $\ell \in \mathbb{N}^*$ caractères et que le texte que le singe doit taper contienne N caractères. Il est raisonnable de supposer que le singe tape chaque caractère indépendamment des autres et totalement au hasard.

1) Quelle est la probabilité que, à l'issue des N premiers caractères tapés, le singe n'ait pas écrit le texte ?
2) On recommence n fois l'expérience consistant à taper un bloc de $N \in \mathbb{N}^*$ caractères. Quelle est la probabilité P_n que le signe n'ai tapé le texte dans aucun des n blocs ?
3) Conclure et commenter.

III Variables aléatoires réelles

Exercice 13. (★★★) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que si $X = Y$ presque sûrement (i.e. $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$), alors X et Y ont la même loi.

Exercice 14. (★★★) On rappelle que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f une application continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Feuille d'exercice n° 24

Variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 1. (★) On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir deux Piles ou deux Faces consécutives. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de lancers nécessaires. Donner la loi de X.

Exercice 2. (★) Parmi les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ (lorsque c'est possible) pour que $(\lambda p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définisse la loi d'une variable aléatoire.

1) $p_n = n\alpha^n$, 2) $p_n = \ln\left(\dfrac{n^\alpha + 1}{n^\alpha + 2}\right)$, 3) $p_n = 1 - \cos\left(\dfrac{1}{(n+1)^{3/2}}\right)$,

Exercice 3. (★★) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n+1) = \dfrac{4}{n}\,\mathbb{P}(X = n)$. Déterminer la loi de X. Donnez $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ sans calculs.

Exercice 4. (★★) Une analyse en laboratoire est délicate : elle réussit 7 fois sur 10. Cette analyse coûte 100 euros.

1) Soit $k \geqslant 1$. Calculer la probabilité qu'il faille recommencer k fois cette analyse pour la réussir au moins une fois.
2) Quel budget doit-on prévoir si on veut avoir au moins 99% de chances de réussir cette analyse une fois ?

Exercice 5. (★) On sait qu'une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes.

1) Si on considère une population de n personnes, on peut modéliser le nombre de personne mesurant plus de 1m90 par une loi de Poisson. Quel paramètre doit-on considérer pour cette loi de Poisson ?
2) Calculer la probabilité que, dans une population de 100 personnes, il y ait au moins une personne mesurant plus de 1m90.
3) Calculer la probabilité que, dans une population de 300 personnes, il y ait au moins deux personne mesurant plus de 1m90.

Exercice 6. (★) Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une variable aléatoire réelle discrète X telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X = n) = \frac{c^n}{(1+c)^{n+1}},$$

où $c \in \mathbb{R}_+^*$ est le prix de la campagne publicitaire de l'année précédente.

1) Montrer que la loi de X est bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
2) Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(X)$.
3) Le commerçant possède un stock de $s \in \mathbb{N}^*$ unités. Déterminer la probabilité de rupture de stock.
4) Combien doit-il prévoir de stock afin que cette probabilité soit inférieure à 1% ?

Exercice 7. (★★) Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(N = k) = 2^{-k}$. On lance N fois un dé équilibré à six faces. On note S la variable aléatoire comptant la somme des points obtenus. Quelle est la probabilité que

1) $N = 2$ sachant que $S = 4$?
2) $S = 4$ sachant que N est pair ?

Exercice 8. (★★) Soit N une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $[N = n]$, X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p \in]0, 1[$ (*si* $n = 0$, $\mathcal{B}(n,p)$ *désigne la loi constante égale à* 0). Déterminer la loi de X.

Exercice 9 – D'après EDHEC 2005. (★★) Un joueur dispose de deux jetons J1 et J2. Le jeton J1 possède une face numérotée 0 et une face numérotée 1. La probabilité qu'il tombe sur 1 est $p \in]0,1[$. Le jeton J2 possède deux faces numérotées 1. Le joueur choisit au hasard un jeton puis effectue une série de lancers avec ce jeton. On considère la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la première face portant le numéro 0 et on pose $X = 0$ si la face portant le numéro 0 n'apparaît jamais.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{(1-p)p^{n-1}}{2}$.
2) En déduire $P(X = 0)$. Ce résultat était-il prévisible ?
3) Montrer que X admet un moment d'ordre 2. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 10. (★★) Un sauteur tente de franchir des barres successives numérotées. Il n'essaye de franchir la barre de hauteur $k \in \mathbb{N}^*$ que s'il a réussi à passer celle de hauteur $k-1$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de sauter la $n^{\text{ième}}$ barre sachant qu'il a sauté les $n-1$ premières est $\dfrac{1}{n}$. On suppose qu'il saute la première barre avec probabilité 1. Notons X la variable aléatoire égale au numéro de la dernière barre franchie correctement.

1) Calculer $\mathbb{P}(X > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire que X est presque sûrement finie.
2) Détermine la loi de X.
3) Calculer l'espérance et la variance de X (si elles existent).

Exercice 11 – Loi de Pascal. (★★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une épreuve de Bernoulli. Soit $p \in]0,1[$ la probabilité d'obtenir un succès. On répète de façon indépendante cette expérience de Bernoulli et on note S_n la variable aléatoire égale au nombre d'expériences réalisées pour obtenir le n-ième succès.

1) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant n$. Exprimer l'événement $[S_n = k]$ au moyen des événements A_k et $B_{n,k}$ définis par
   - A_k : « la $k^{\text{ième}}$ expérience est un succès »,
   - $B_{n,k}$: « au cours des $k-1$ premières expériences, on a obtenu $n-1$ succès ».
2) Calculer $\mathbb{P}(A_k)$ et $\mathbb{P}(B_{n,k})$ et en déduire la loi de S_n :
$$\forall k \geqslant n \qquad \mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$
On dit que S_n suit une loi binomiale négative (ou de Pascal) de paramètres n et p. Pour $n = 1$, il s'agit de la loi géométrique de paramètre p.
3) En déduire que
$$\forall x \in]0,1[, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^{k-n} = \frac{1}{(1-x)^n}.$$
4) Calculer l'espérance et la variance de S_n.
La formule de la question 3 sera d'une grande aide. Pour la variance, on pourra calculer d'abord $\mathbb{E}(S_n(S_n+1))$.

Exercice 12. (★) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$. Quelle est la loi de z^X lorsque $z \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$?

Exercice 13. (★) Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

1) Soit $z \in \mathbb{R}$. Montrer que $Y = z^X$ est une variable aléatoire qui admet une espérance et la calculer.
2) Montrer que $Y = \dfrac{1}{1+X}$ est une variable aléatoire qui admet une espérance et la calculer.

Exercice 14. (★) Une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ a-t-elle plus de chance d'être paire ou impaire ?
On pourra commencer par écrire $\dfrac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}$ comme la somme d'une série.

Exercice 15. (★) Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \lambda$ et $\mathbb{P}\left(X \leqslant \dfrac{\lambda}{2}\right) \leqslant \dfrac{4}{\lambda}$. Est-ce intéressant ?

Exercice 16. ($\bigstar$) Soit X une variable aléatoire réelle discrète admettant un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \mathbb{P}(|X| \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|^r)}{x^r}.$$

Exercice 17. ($\bigstar\bigstar$) Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance. L'objectif de cet exercice est de montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X = j) + (n+1)\mathbb{P}(X > n)$.
2) Justifier que $(n+1)\mathbb{P}(X > n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$.
3) Conclure.

Exercice 18. ($\bigstar\bigstar\bigstar$) Soient $r_0 \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \left]1, +\infty\right[$. Un joueur joue à Pile ou Face contre la banque du casino avec une pièce dont la probabilité de tomber sur Pile est $p \in \left]0, 1\right[$. On suppose qu'il est très fortuné. Il mise initialement r_0 euros. Tant qu'il obtient Face, il perd ce qu'il a misé et remise d fois sa mise précédente. Dès qu'il obtient Pile, il gagne d fois sa dernière mise et quitte le casino.

1) Quelle est la loi du nombre X de lancers ? Justifier que le jeu s'arrête presque sûrement.
2) Soit G la variable correspondant au gain du joueur à l'issue de la partir (comptant bien sûr la mise gagnante mais aussi toutes les mises qu'il a perdues). Exprimer G en fonction de X.
3) Calculer l'espérance de G (lorsqu'elle existe).
4) Pour quelles valeurs de d a-t-on $\mathbb{E}(G)$? Ce jeu est-il favorable au joueur ?

Les deux exercices suivants utilisent la notion de variables aléatoires réelles indépendantes qui n'est pas au programme de première année d'ECS (mais au programme de deuxième année). Elle est cependant tout à fait accessible dès à présent avec les résultats et techniques que nous avons à notre disposition. En voici la définition :

Définition. *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles. On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes si*

$$\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant t_i).$$

Dans le cas où $X_1, \ldots, X_n$ sont discrètes, elles sont indépendantes si et seulement si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Exercice 19. ($\bigstar\bigstar$) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendants de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

Exercice 20. ($\bigstar\bigstar\bigstar$) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendants ayant la même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On note F la fonction de répartition de X_1. Posons $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $T_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$.

1) Exprimer les fonctions de répartition de M_n et T_n en fonction de F et de n.
2) Exprimer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{E}(T_n)$ (si elles existent) en fonction de F.
   On s'aidera d'un exercice de cette feuille.
3) Déterminer la loi de T_n lorsque X_1 suit une loi géométrique de paramètre $p \in \left]0, 1\right[$.

Feuille d'exercice n° 25

Compléments sur les espaces vectoriels

I Somme d'espaces vectoriels et supplémentaire

Exercice 1. (★) Montrer que les sous-espaces vectoriels $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z=0\}$ et $F = \mathrm{Vect}\big((1,1,0)\big)$ sont supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. (★) Notons E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites réelles constantes et G l'ensemble des suites convergentes vers 0. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 3. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures).

1) Donner une base de l'ensemble $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.
2) A-t-on $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
3) Déterminer un supplémentaire de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 4. (★★) Notons $F = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \,|\, f \text{ est constante}\}$, $G_- = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \,|\, f \text{ est nulle sur } [0,+\infty[\}$ et $G_+ = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \,|\, f \text{ est nulle sur }]-\infty,0]\}$. Montrer que F, G_- et G_+ sont des s.e.v de $C^0(\mathbb{R})$ et que $C^0(\mathbb{R}) = F \oplus G_- \oplus G_+$.

Exercice 5. (★★★) Soit $(F_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de s.e.v de E. Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $F_k \cap (F_1 + \cdots + F_{k-1}) = \{0\}$.

II Applications linéaires, image et noyau

Exercice 6. (★) Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires ?

1) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (xy,y,z) \end{array}$

2) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & 2019(x-y+z-t) \end{array}$

3) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - 2P'(X) \end{array}$

4) $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$

5) $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_n \end{array}$

6) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (0, x+z, z-y, 0, 0, x+2z) \end{array}$

7) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t,u) & \longmapsto & (1, x+y, z+t, t+u) \end{array}$

8) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ (a,b) & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & a+b \\ -b & a-b & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

9) $\begin{array}{ccc} C^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 t\,f(t)\,dt \end{array}$

Exercice 7. (★) Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de $C^\infty(\mathbb{R})$?

$$1)\ f \longmapsto f' - 2f'' + 3f, \qquad 2)\ f \longmapsto \exp \circ f \qquad 3)\ f \longmapsto (\sin \times f)' \qquad 4)\ f \longmapsto f''(2019)$$

Exercice 8. (★) Soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (y-2z, 2x+y-4z, x+y-3z)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3) A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$? Pouvait-on le prévoir à l'aide d'un résultat du cours ?

Exercice 9. (★) Notons $F = \big\{(x+y+4z, 2x+4z, 3x+2y+10z) \,\big|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big\}$.

1) Montrer qu'il existe $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $F = \mathrm{Im}(f)$. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On que F est définie sous forme paramétrée.
2) Montrer que $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ où e_1 et e_2 sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
3) Écrire F sous la forme $\mathrm{Ker}(g)$ avec $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. On dit alors que $g(x) = 0$ est une équation de F.
4) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, i.e. il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = \{\lambda u \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$.
5) L'endomorphisme f est-il surjectif ? Injectif ? Bijectif ?

Exercice 10. (★) Montrer que $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un endomorphisme. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Est-ce que f est un automorphisme ?

Exercice 11. (★) Montrer que $g : P \in \mathbb{K}[X] \longmapsto XP$ est un endomorphisme. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$. Est-ce que g est un automorphisme ?

Exercice 12. (★)Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Montrer que $f : z \in E \longmapsto z + i\overline{z}$ est un endomorphisme. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 13. (★) Soit $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^N$. Est-il injectif ?
2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f^k)$.
3) Montrer que f est surjectif.

Exercice 14. (★)

1) Montrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que
$$f(1,0,0) = (0,1), \qquad f(1,1,0) = (1,0), \qquad \text{et} \qquad f(1,1,1) = (1,1).$$
2) Est-elle surjective ? injective ? bijection ?
3) Exprimer $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
4) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 15. (★) Soient E un espace vectoriel admettant une base (e_1, e_2, e_3). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que
$$f(e_1) = e_1 - e_2, \qquad f(e_1 - e_2) = e_1 + e_2 - e_3, \qquad \text{et} \qquad f(e_3 + e_2) = 2(e_1 - e_2 + \alpha e_3).$$
Déterminer α afin que f soit injective.

Exercice 16. (★★) Soient E, E', F et F' des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Soient φ un isomorphisme de E sur E' et ψ un isomorphisme de F sur F'. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E',F') \\ f & \longmapsto & \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{array}$ est bien définie et est un isomorphisme.

Exercice 17. (★★★) Le but de cet exercice est de montrer que
$$\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \\ \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \end{array} \right.$$

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
2) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$
3) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = E$
4) Conclure.

Exercice 18. (★★) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient f et g deux endomorphismes de E.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
2) Montre que $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = f\big(\mathrm{Ker}(g \circ f)\big)$.
3) Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
4) Supposons que f et g commutent, i.e. $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f, i.e. $f\big(\mathrm{Ker}(g)\big) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et $f\big(\mathrm{Im}(g)\big) \subset \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 19. (★★) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$.

Cet exercice est un immense classique. Voici la démarche à suivre : le fait que, pour un $x \in E$ donné quelconque, la famille $(x, f(x))$ est liée signifie qu'il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Le but de cet exercice est donc de montrer que λ_x ne dépend pas de x en fait.

1) *Soit (x, y) une famille libre. En s'intéressant à $x + y$, montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.*
2) *Soit (x, y) une famille liée avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$.*
3) *Conclure.*

Exercice 20. (★★★) Pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on définit l'application

$$T(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & \text{si} \quad x > 0, \\ f(0) & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \end{array},$$

puis l'application $T : \begin{array}{ccc} C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & T(f) \end{array}$.

1) Montrer que $T(f) \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2) Montrer que T est un endomorphisme de $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
3) Montrer que T est injective.
4) Soit $g \in \mathrm{Im}(T)$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $xg'(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Est-ce que T est surjective ?
5) Déterminer $\mathrm{Im}(T)$.

III Polynômes d'endomorphisme

Exercice 21. (★★) Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que le polynôme $f^2 = 5\,\mathrm{Id}_E - 4f$.

1) Montrer que f est un automorphisme et déterminer f^{-1} en fonction de f.
2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{K}^2$ tel que $f^n = a_n f + b_n \mathrm{Id}_E$.
3) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n.
   On pourra montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Exercice 22. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $d : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto P'$.

1) Montrer que d est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer son noyau et son image.
2) Calculer $(\mathrm{Id}_E - d) \circ \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} d^k\right)$.
3) En déduire que $\mathrm{Id}_E - d$ est un automorphisme de E.
4) Déterminer l'antécédent de $\dfrac{X^n}{n!}$ par $\mathrm{Id}_E - d$.

IV Projection vectorielle et projecteurs

Exercice 23. (★) Reprendre les exercices 1, 2 et 4 en explicitant les projections sur F (resp. sur G) parallèlement à G (resp. F).

Exercice 24. (★) Soit $p : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (2y-3x, 4y-6x) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^2$. Déterminer des sous-espaces vectoriels F et G tels que p est la projection sur F parallèlement à G (on en donnera des bases).

Exercice 25. (★) Soit $p : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x+z, y+z, 0) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer des sous-espaces vectoriels F et G tels que p est la projection sur F parallèlement à G (on en donnera des bases).

Exercice 26. (★★) Soit B un polynôme non nul à coefficients réels.

1) Montrer que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme associe le reste de sa division euclidienne par B est un projecteur.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 27. (★★) Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $p \circ q = q \circ p$.

1) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E.
2) Montrer que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 28. (★★) Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = \big(-x-2y-2z, 4x+5y+4z, -x-y\big)$$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2) a) Vérifier que $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
   b) En déduire que f est un automorphisme et expliciter f^{-1}.
3) Donner une base de $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et une base de $E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
4) Posons $p = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $q = 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f$.
   a) Exprimer f en fonction de p et q.
   b) Montrer que p et q sont des projecteurs vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0$.
   c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$.
5) En remarquant que $p + q = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{E}_1 \oplus E_2$.

Exercice 29 – Symétries et involutions. (★★★) Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Soient F un s.e.v de E et G un supplémentaire de F sans E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique couple de vecteurs $(u_x, v_x) \in F \times G$ tel que $x = u_x + v_x$. L'application $s : x \in E \longmapsto u_x - v_x$ est appelée symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G.

1) a) Montrer que $s \in \mathscr{L}(E)$.
   b) Que dire de l'endomorphisme $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$?
   c) Montrer que s est un automorphisme de E et que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
   d) Montrer que $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
2) Soit u un automorphisme de E tel que $u^{-1} = u$ (on parle d'involution de E).
   a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.
   b) Montrer que u est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$.

Feuille d'exercice n° 26

Intégrales sur un intervalle quelconque

I Convergence d'intégrales généralisées

Exercice 1. (★ à ★★) Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x+3}}\,dx$,
2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x-1)^{3/2}}\,dx$,
3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x-2)}}$,
4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2+5x+2}{7x^5+2x^3+3x+1}\,dx$,
5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$,
6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^{2019}(x)}{x^2}\,dx$,
7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\tan(x)}}$,
8) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{x}(\ln(x))^2}\,dx$,
9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+xe^x}$,
10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\cos(x)\,dx$,
11) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x^{3/2}-\sqrt{x^3+1}\right)dx$,
12) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^5 e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx$,
13) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\,\mathrm{Arctan}(x)}\,dx$,
14) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\tan(\sqrt{x})}{\ln(\cos(\sqrt{x}))}\,dx$,
15) (★★★) $\displaystyle\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dx$.

Pour la question 15, on pourra montrer que, au voisinage de $\frac{2}{\pi}$, $\cos\left(\frac{1}{t}\right) \sim \frac{\pi^2}{4}\left(t-\frac{2}{\pi}\right)$.

Exercice 2. (★★) Étudier la convergence des intégrales suivantes en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$:

1) $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \left|\ln(x)\right|^{\alpha}dx$,
2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}\right)^{\alpha}dx$,
3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{\beta x}\,dx$,
4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^{\alpha})}{x^{\beta}}\,dx$
5) $\displaystyle\int_0^{1} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx$,
6) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x^{\beta}}{(\sin(x))^{\alpha}}\,dx$.

Exercice 3 – Intégrales de Bertrand. (★★) Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

1) Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}\big(\ln(t)\big)^{\beta}}$ converge si et seulement si ($\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)).
2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^{\alpha}\big|\ln(t)\big|^{\beta}}$ converge si et seulement si ($\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)).

II Calcul d'intégrales généralisées

Exercice 4. (★★) Justifier que les intégrales suivantes convergent et calculer-les.
Attention : on ne fait des IPP et changements de variables qu'avec des intégrales sur des segments !

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.
2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(2+x)}$.
On remarquera que $1 = (x+2)-(x+1)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)dx$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x^2}\,dx$.
5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
On remarquera que $1 = (1+x^2)-x^2$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *puis exprimer* I_{n+1} *en fonction de* I_n.
6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. *On posera* $u = e^x$.
7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$. *On posera* $u = 1/t$.

Exercice 5. (★★) Montrer que les intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x))\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x))\,dx$ convergent et calculer leurs valeur.
On pourra montrer que $I = J$ et calculer $I + J$.

Exercice 6. (★) Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. Posons $I(n,p) = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln^p(x)\,dx$.

1) Montrer que l'intégrale $I(n,p)$ converge.
2) Déterminer une relation entre $I(n,p+1)$ et $I(n,p)$.
3) En déduire une expression de $I(n,p)$.

III Fonctions et suites définies à partir d'intégrales généralisées

Exercice 7. (★★) 1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt$ converge.

2) Montrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f'.
3) a) Montrer que $g : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{1-e^{-t^2}}{t}\,dt$ admet une limite finie à droite en 0.
   b) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = -\ln(x) - f(x) + f(1)$.
   c) En déduire que $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 8. (★) 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{x^n - 1}\,dx$ converge.

2) A l'aide du changement de variable $y = x^n$ dans l'expression de I_n, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$ converge.

Exercice 9 – D'après EMLYON 2013. (★★★)

1) Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ converge.
2) a) Montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,dt$ et en déduire que $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
   b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$ converge et que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\left| f(x) - \dfrac{1}{x} \right| \leqslant \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt$.
   c) En déduire que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
3) Soit $(x,h) \in]0,+\infty[^2$ tel que $h > -\dfrac{x}{2}$.
   a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$ converge.
   b) Établir que, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $\left| \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t} - \dfrac{1}{x+t} \right) + \dfrac{1}{(x+t)^2} \right| \leqslant \dfrac{2|h|}{x^3}$.
   c) En déduire que $\left| \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt \right| \leqslant \dfrac{2|h|}{x^3}$.
4) En déduire que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$.
5) A l'aide d'une intégration par parties (*sur un segment bien sûr*), montrer que
$$\forall x \in]0,+\infty[, \qquad f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).$$
6) En déduire que f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]0,+\infty[, \qquad f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(k-1)!}{x^k} + f(x).$$

Exercice 10. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}}$.

1) Justifier que l'intégrale I_n converge.
2) Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

   En déduire une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ sur $\mathbb{R}_+$.

   On pourra aussi utiliser le fait que $x^2-x+1 = (x-1/2)^2+3/4$.
3) Calculer I_0 et exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \ln(\sqrt[3]{n} I_n)$. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}(v_{n+1}-v_n)$.
5) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $I_n \sim \dfrac{A}{\sqrt[3]{n}}$.

IV Exercices plus théoriques

Exercice 11. (★★) Soit f une fonction positive et continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Ce résultat reste-t-il vrai si on ne suppose pas que f est positive (on analysera les deux sens de l'équivalence).

Exercice 12. (★) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs positives qui tendent vers $+\infty$ en $+\infty$.

1) Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = 0$.
2) Le résultat persiste-t-il si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge ?

Exercice 13. (★★★) Rappelons que, si $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ est une série convergente, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'analogue de cette propriété pour les intégrales généralisées : si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge a-t-on $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

1) Supposons que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(f(t)\big)^2\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(f'(t)\big)^2\,dt$ convergent.
   a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)\,dt$ converge.
   b) En déduire que f^2 admet une limite finie en $+\infty$ puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2) Supposons que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. En encadrant $f(x)$ par deux intégrales, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = \begin{cases} 1+2^n(x-n) & \text{si il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x \in [n-2^{-n}, n], \\ 1+2^n(n-x) & \text{si il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x \in [n, n+2^{-n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
   c) Montrer par l'absurde que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$..

Feuille d'exercice n° 27

Variables aléatoires à densité

Exercice 1. (★) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,2])$. Posons $Y = X^2$.

1) Déterminer la fonction de répartition de Y.
2) En déduire que Y est une variable à densité. On déterminera une densité de Y.
3) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ de deux façons.

Exercice 2. (★) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $Y = \lfloor X \rfloor + 1$.

Exercice 3. (★) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-a,a])$ avec $a > 0$. Montrer que $Y = e^X$ est une variable aléatoire à densité dont un précisera une densité.

Exercice 4. (★★) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et admettant une densité f qui est une fonction paire sur $\mathbb{R}$. On définit la variable aléatoire Y par

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ X(\omega) \leqslant 0 \\ X(\omega) & \text{si } \ X(\omega) > 0. \end{cases}$$

Montrer que Y n'est ni une variable aléatoire discrète, ni une variable aléatoire à densité.

Exercice 5 – Loi Gamma. (★) On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi Gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$, notée $\gamma(a, \lambda)$, si elle admet pour densité la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \, x^{a-1} \, e^{-\lambda x} \, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler définie par

$$\forall y \in]0, +\infty[, \qquad \Gamma(y) = \int_0^{\infty} t^{y-1} e^{-t} \, dt.$$

1) Justifier qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité.
2) Qu'est ce que la loi $\gamma(1, \lambda)$?
3) Montrer que X admet une espérance et une variance. Calculer-les.
4) Montrer que $\lambda X \hookrightarrow \gamma(a, 1)$.
5) Expliciter une densité de la loi $Y = \dfrac{1}{X}$ et de la loi $\sqrt{X}$.

Exercice 6. (★) Soit X une variable aléatoire dont une densité est $f : x \longmapsto \left(\dfrac{4}{3}\right)^{1/4} \Gamma\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\dfrac{x^4}{12}\right)$. Donner la loi de $Y = X^4$.

On remarquera d'abord que f est paire puis on effectuera le changement de variable donné par la fonction $\varphi : x \longmapsto x^4$ qui est de classe C^1 sur $[\varepsilon, A]$ pour tout $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \varepsilon < A$.

Exercice 7. (★★) Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{4} \, \mathbb{1}_{]0,1[}(x) + \frac{3}{8} \, \mathbb{1}_{]3,5[}(x).$$

1) Déterminer la fonction de répartition de X.
2) Calculer l'espérance de X.
3) Déterminer une densité de $Y = 1/X$.

Exercice 8 – Loi de Pareto. ($\bigstar$) Soient $\alpha > 0$ et $c > 0$.

1) Déterminer $K > 0$ afin que $f : x \longmapsto \dfrac{K}{x^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{[c,+\infty[}(x)$ soit une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire dont f est une densité. On dit alors que X suit la loi de Pareto de paramètres α et c.

2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3) Pour quelles valeurs de α, X admet-elle une espérance ? Calculer $\mathbb{E}(X)$ dans ce cas.
4) Pour quelles valeurs de α, X admet-elle un moment d'ordre 2 ? Calculer $\mathbb{V}(X)$ dans ce cas.
5) Soit $\beta > 0$. Déterminer la loi de X^β.
6) a) Déterminer la loi de $Y = \dfrac{1}{X}$.
   b) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ de deux façons différentes.

Exercice 9 – Loi du χ^2 à un degré de liberté. ($\bigstar$) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On dit que $Y = X^2$ suit la loi du χ^2 à un degré de liberté.

1) Déterminer une densité de Y.
   On pourra effectuer le changement de variable $x = \sqrt{y}$ qui est de classe C^1 sur $[\varepsilon, A]$ pour tout $(\varepsilon, A) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \varepsilon < A$.
2) Donner, sans calcul, l'espérance de Y.

Exercice 10. ($\bigstar\bigstar$) On dispose d'un bâton d'un mètre. On le casse en deux morceaux en choisissant le point de cassure au hasard.

1) Déterminer la loi de la longueur du petit morceau.
2) Déterminer la loi de la longueur du grand morceau.
3) Déterminer la loi du rapport de la longueur du petit morceau et de celle du grand morceau.

Exercice 11 – Loi de Laplace. ($\bigstar\bigstar$) Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $b > 0$.

1) Déterminer $K > 0$ afin que $f : x \longmapsto K \exp\left(-\dfrac{|x-\mu|}{b}\right)$ soit une densité de probabilité.

Soit X une v.a. dont f est une densité. On dit alors que X suit la loi de Laplace de paramètres μ et b.

2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3) Calculer l'espérance et la variance de X, si elles existent.
4) Déterminer la loi de $Y = \dfrac{X-\mu}{b}$ et de $Z = |Y|$.

Exercice 12 – Absence de mémoire. ($\bigstar\bigstar\bigstar$) Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, et qui n'est pas presque sûrement nulle et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire, i.e.,

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, \qquad \mathbb{P}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(X > y).$$

Montrer que X suit une loi exponentielle.

Exercice 13 – Simulation de loi par inversion de la fonction de répartition. ($\bigstar\bigstar$) Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité. On suppose que sa fonction de répartition F est strictement croissante sur un intervalle ouvert I vérifiant $\mathbb{P}(X \in I) = 1$.

1) Justifier que F_X est une bijection de I sur $]0, 1[$.
2) Soit U une v.a. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$. Montrer que la variable aléatoire $F_X^{-1}(U)$ est à densité et déterminer sa fonction de répartition.
3) En déduire une méthode pour simuler
   a) une v.a. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
   b) une v.a. de loi de Cauchy.

Exercice 14 – D'après l'oral ESCP 2010. ($\bigstar\bigstar$) Soit X une v.a. de densité $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(2)\,(1+x)} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$.
Déterminer la loi de $Y = \dfrac{1}{X} - \left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$.
On pourra utiliser le système complet d'événements associe à la variable aléatoire discrète $\left\lfloor \dfrac{1}{X} \right\rfloor$.

Exercice 15 – Propriétés de la fonction Φ. (★) Notons Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) Montrer que $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$.
3) Implémenter en Scilab la fonction Φ à l'aide la méthode des rectangles (et de la question précédente).
4) Exprimer $\mathbb{P}(|X| > x)$ en fonction de $\Phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
5) Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Exprimer $F_Y(x)$ en fonction de $\Phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 16 – Moments d'une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. (★★) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1) Montrer que X admet des moments[1] de tout ordre. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note μ_r le moment d'ordre r de X.
2) Montrer que $\mu_{2r+1} = 0$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.
3) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\mu_{r+2} = (r+1)\mu_r$.
4) En déduire que une expression de μ_r pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Exercice 17 – Transformée de Laplace d'une v.a. de loi normale. (★★) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Notons $\varphi_{m,\sigma}$ une densité de X.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer $\Lambda_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \varphi_{m,\sigma}(x)\, dx$.

On dit que Λ est la transformée de Laplace de la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Exercice 18 – Loi log-normale centrée réduite. (★★★)

1) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $Y = e^X$ admet une densité. En expliciter-une.

On dit alors que Y suit une loi log-normale centrée réduite. On note f une densité de Y. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, notons $f_\alpha : x \longmapsto \big(1 + \alpha \sin(2\pi \ln(x))\big) f(x)$.

2) Montrer que f_α est une densité de probabilité.
3) Soit Y_α une v.a. de densité f_α. Montrer que les moments de Y_α ne dépendent pas de α.

Nous en déduisons que les moments d'une v.a. ne caractérisent pas sa loi.

Exercice 19. (★★) Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}_-$. Le but de cet exercice est de montrer que X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$ converge et que, dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$.

On introduit la fonction $\psi : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \displaystyle\int_0^x t f(t)\, dt$.

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^x \big(1 - F_X(t)\big)\, dt = x\big(1 - F_X(x)\big) + \psi(x)$.
2) Supposons que X admette une espérance.
   a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant x\big(1 - F_X(x)\big) \leqslant \mathbb{E}(X) - \psi(x)$.
   b) En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\big(1 - F_X(x)\big)$.
   c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$ converge et que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$.
3) Supposons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$ converge.
   a) Montrer que ψ admet une limite finie en $+\infty$.
   b) En déduire que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F_X(t)\big)\, dt$.

1. On rappelle qu'on dit qu'une variable aléatoire réelle X admettant une densité f admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$ si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^r f(t)\, dt$ converge. Dans ce cas on appelle moment d'ordre r l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\, dt$.

Feuille d'exercice n° 28

Convergences et approximations de variables aléatoires

Voici quelques valeurs usuelles de la fonction de répartition Φ de la loi Normale centrée réduite :

$$\Phi(1,64) \approx 0.95 \qquad \Phi(1,96) \approx 0,975 \qquad \Phi(2,33) \approx 0,99 \qquad \Phi(2,58) \approx 0,995.$$

Exercice 1. (★) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donnons-nous une variable aléatoire X_n telle que $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n+2}{(n+1)(k+1)(k+2)}$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X discrète dont on explicitera la loi. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

Exercice 2. (★) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, définissons $f_n : t \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{an}{1+n^2x^2}$.

1) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ afin que f_n soit une densité de probabilité.
2) Soit X_n une variable aléatoire de densité f_n. Est-ce que X_n admet des moments ?
3) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers 0.

Exercice 3. (★) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $f_n : t \in \mathbb{R} \longmapsto (n+1)(1-t)^n \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ et donnons-nous X_n une variable aléatoire de densité f_n.

1) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bien une densité de probabilité.
2) a) Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $F_{X_n}(t/n)$. On fera apparaître les termes $\mathbb{1}_{[0,n]}(t)$ et $\mathbb{1}_{]n,+\infty[}(t)$.
   b) Montrer que $(nX_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une v.a dont on précisera la limite.

Exercice 4. (★) Soit $n \in\in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On lance une pièce de monnaie équilibrée et on pose $X = 1$ (resp. $X = -1$) si la pièce tombe sur Pile (resp. sur Face). On dispose d'une urne contenant n boules dont une seule rouge. On tire uniformément une boule dans cette urne, indépendamment du résultat du lancer de pièce. Si on obtient la boule rouge, on pose $X_n = e^n$, sinon on pose $X_n = X$. Déterminer les lois de X_n et $X_n - X$ puis étudier la convergence de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers X (en probabilité et en loi).

Exercice 5. (★) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r.d admettant un moment d'ordre 2. Soit X une v.a.r.d admettant aussi un moment d'ordre 2. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n - X) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n - X) = 0$.

1) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X.
2) Étudier la réciproque.
   On pourra considérer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n telle que $\mathbb{P}(X_n = n) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = \dfrac{1}{n}$.

Exercice 6. (★★) On dispose d'un dé équilibré à six faces. Quel est le nombre de lancers nécessaires pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du numéro 1 au cours de ces n lancers diffère de $1/6$ d'au plus 10^{-2}. On donnera une minoration de n d'abord en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis une approximation par une loi Normale. Commenter les résultats.

Exercice 7. (★★) Un avion comporte 500 places. La probabilité qu'un passager ayant réservé une place ne se présente pas à l'embarquement est de 5%. Estimer le nombre de places que la compagnie aérienne peut vendre pour que la probabilité de voir se présenter plus de passagers que de places disponibles soit inférieure ou égale à 1%.

Exercice 8. (★★) Un éleveur possède 100 vaches qui se répartissent au hasard entre deux étables contenant chacune n places avec $n \in [\![50, 100]\!]$. Déterminer une valeur de n permettant à chaque vache de trouver une place avec une probabilité supérieure ou égale à 95%. On donnera une minoration de n d'abord en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puis une approximation par une loi Normale. Commenter les résultats.

Exercice 9. (★) Un fabriquant de composants électroniques sait que 0.2% de composants sortent défectueux de l'usine. Quelle est la probabilité pour que, parmi un lot de 1000 composants, il y en ait au plus 4 défectueux ? On utilisera une approximation par une loi bien choisie.

Exercice 10 – Temps d'attente d'un bus. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une expérience est tentée à chaque temps $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots$. A chaque essai le résultat est un succès avec probabilité $p_n \in]0,1[$ ou un échec avec probabilité $1-p_n$, indépendamment des autres essais (par exemple, on demande après chaque intervalle de temps de longueur $\frac{1}{n}$ si le bus est passé). On appelle T_n le temps à attendre avant le premier succès.

1) Quelle est la loi de $n\,T_n$?
2) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi en fonction de λ.

Exercice 11. (★★) On considère une urne composée de N boules dont une proportion p de boules rouges. On effectue n tirages d'une boule sans remise (avec $n \in [\![1, N]\!]$) et on note X_N le nombre de boules rouges obtenues.

1) Justifier que $X_N(\Omega) = [\![\max(0, n - N(1-p)), \min(n, Np)]\!]$.
2) Calculer $\mathbb{P}(X_N = k)$ pour tout $k \in X_N(\Omega)$.
On dit que X_N suit une loi hypergéométrique de paramètre (N, n, p).
3) Montrer que la suite $(X_N)_{N\geqslant n}$ converge vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Exercice 12. (★★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, introduisons une variable aléatoire X_n de loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{n}\right)$ et posons $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une v.a à densité et en déterminer une densité.
On pourra utiliser le système complet d'événements associé à la variable aléatoire discrète $\lfloor X_n \rfloor$.
2) Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Montrer que $(\mathbb{E}(Z_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
4) Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a Z dont on précisera la loi.

Exercice 13. (★★★) À l'aide du TCL, donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14 – D'après l'oral HEC 2006. (★★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes[1] et de même loi exponentielle de paramètre 1. On pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1) a) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.
   b) En déduire que M_n admet une densité et en déterminer une.
2) On pose $Y_n = M_n - \ln(n)$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F_{Y_n}(t) = \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n \mathbb{1}_{]-\ln(n),+\infty[}(t)$.
3) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}_{]-\ln(n),+\infty[}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
4) En déduire que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a. Y dont on donnera la fonction de répartition.
5) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et en déterminer une. On dit que Y suit une loi standard de Gumbel.

Exercice 15. Montrer que les inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev sont toujours vraies pour des variable aléatoire à densité (avec les mêmes hypothèses que pour les v.a.r.d).

1. La définition des variables aléatoires indépendantes (au programme de deuxième année) est donnée dans la feuille de TD n° 24.

Exercice 16 – Inégalités de concentration. (★★) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

1) A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{\lambda}$.
2) Soit Z une variable aléatoire réelle discrète d'espérance nulle et de variance σ^2.
   a) Montrer que, pour tous $a > 0$ et $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$.
   b) En déduire que $\mathbb{P}(Z \geqslant a) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}$. A-t-on fait le choix optimal pour x ?
   c) En déduire que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \dfrac{1}{1+\lambda}$ et commenter.
3) a) Montrer que la fonction $G_X : t \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^k\, \mathbb{P}(X = k)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et donner-en une expression.
   b) Montrer que, pour tous $t \geqslant 1$ et $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{G_X(t)}{t^a}$.
   c) Étudier le minimum de $t \longmapsto \dfrac{G_X(t)}{t^{2\lambda}}$ sur $[1, +\infty[$.
   d) En déduire que $\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \left(\dfrac{e}{4}\right)^\lambda$ et commenter.

Exercice 17. (★★★) Soit n un entier naturel non nul. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on obtient un numéro supérieur ou égal au numéro précédent. On note X_n la v.a égale au nombre de tirages effectués.

1) a) Justifier que $X_n(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.
   b) Calculer $\mathbb{P}(X_n > k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
   c) En déduire que $\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$ pour tout $n \in X_n(\Omega)$.
2) Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.
3) Comparer $\mathbb{E}(X)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 18 – La convergence en probabilité implique la convergence en loi. (★★★) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles qui converge en probabilité vers une variable aléatoire réelle X.

1) Soient Y et Z deux variables aléatoires réelles quelconques. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}(Y \leqslant a) \leqslant \mathbb{P}(Z \leqslant a + \varepsilon) + \mathbb{P}(Z - Y > \varepsilon).$$
2) Soient $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$F_X(t-\varepsilon) - \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leqslant F_{X_n}(t) \leqslant F_X(t+\varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon).$$
3) En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.
4) Étudions la réciproque.
   a) **Réciproque partielle.** Supposons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $a \in \mathbb{R}$ (une variable aléatoire presque sûrement constante égale à a). Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers a.
   On commencera par montrer que, $\mathbb{P}(|X_n - a| > \varepsilon) \leqslant 1 - F_{X_n}(a+\varepsilon) + F_{X_n}(a-\varepsilon)$ *pour tous* $\varepsilon > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$.
   b) **La réciproque est fausse en général.** On lance une pièce de monnaie équilibrée et on note $X = 1$ (resp. $X = 0$) si on tombe sur Pile (resp. Face). On définit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{2n} = 1 - X$ et $X_{2n+1} = X$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X mais pas en probabilité.

Exercice 19. (★★) Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a.r qui convergent en probabilité vers des variables aléatoires respectives X et Y. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\alpha X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \alpha X \qquad \text{et} \qquad X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X + Y$$
Pour la deuxième convergence, on pourra commencer par montrer que, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\varepsilon > 0$, *si* $|x+y| > \varepsilon$, *alors* $|x| > \varepsilon/2$ *ou* $|y| > \varepsilon/2$.

Feuille d'exercice n° 29

Fonctions convexes

I Convexité, concavité, points d'inflexions

Exercice 1. (★ à ★★) Sur quels intervalles les fonctions suivantes sont-elles convexes ? concaves ? Préciser les éventuels points d'inflexion.

1) $x \longmapsto e^{-x^2/2}$,
2) $x \longmapsto \sin(x) - \cos(x)$,
3) $x \longmapsto x^\alpha \ln(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,
4) $x \longmapsto |x-5| + |2x+3|$,
5) $x \longmapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,
6) $x \longmapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,
7) $x \longmapsto x + \sin(x)$,
8) $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)}$,
9) $x \longmapsto \ln\left(\left|\dfrac{x-2}{x+5}\right|\right)$,

Exercice 2. (★) Soit P une application polynomiale de degré 3. Montrer que la courbe représentative de P possède un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

II Utilisation de la convexité

Exercice 3. (★) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$.

Exercice 4. (★) Montrer que, pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\dfrac{\ln(x)}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 5. (★) Montrer que, pour tout $(x,y) \in]1,+\infty[^2$, $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$.

Exercice 6. (★★) Montrer que la fonction $x \longmapsto x\ln(x)$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que, pour tous réels x, y, a, b strictement positifs, $x\ln\left(\dfrac{x}{a}\right) + y\ln\left(\dfrac{y}{b}\right) \geqslant (x+y)\ln\left(\dfrac{x+y}{a+b}\right)$.

Exercice 7 – Un grand classique : comparaison de moyennes. (★) Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. On pose

$$A = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \qquad G = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}, \qquad H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}, \qquad Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Le réel A (resp. G, H et Q) est appelé la moyenne arithmétique (resp. géométrique, harmonique et quadratique) des réels $x_1, \ldots, x_n$. En utilisant notamment la concavité de la fonction $\ln$, montrer que

$$H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q.$$

Exercice 8 – Inégalité de Jensen. (★★) Soit φ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

1) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a \neq b$. En utilisant des sommes de Riemann, montrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_0^1 \varphi \circ f(t)\,dt.$$

2) Soit X une variable aléatoire réelle finie définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(X))$.

Exercice 9 – Inégalités de Hölder et Minkowski. (★★★) Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ vérifiant $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

1) Montrer que, pour tout $(u,v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $uv \leqslant \dfrac{u^p}{p}+\dfrac{v^q}{q}$.

2) Soient $u_1,\dots,u_n$ et $v_1,\dots,v_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n |u_i|^p = \sum_{i=1}^n |u_i|^q = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leqslant 1$.

3) Soient $x_1,\dots,x_n$ et $y_1,\dots,y_n$ des réels. Montrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{1/q}.$$

On pourra poser, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $u_k = x_k \left(\displaystyle\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{-1/p}$ *et* $v_k = y_k \left(\displaystyle\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{-1/q}$.

4) En déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p}$$

On commencera par remarquer que $|x_k+y_k|^p \leqslant |x_k|\,|x_k+y_k|^{p-1} + |y_k|\,|x_k+y_k|^{p-1}$ *pour tout* $k \in [\![1,n]\!]$,

III Exercices plus théoriques

Exercice 10. (★) Soient f et g deux fonctions convexes sur des intervalles respectifs I et J. Supposons que $f(I) \subset J$. Montrer que, si g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe. Qu'en est-il si g n'est pas croissante ?

Exercice 11. (★★) Soit f une fonction convexe sur I. Soit $x_0 \in I$.

1) Supposons que f admet un minimum local en x_0. Montrer qu'il s'agit alors d'un minimum global.

2) Supposons cette fois que f est dérivable sur I et que x_0 est un point critique (i.e. $f'(x_0)=0$). Montrer que f admet un minimum global en x_0.

Exercice 12 – Régularité des fonctions convexes. (★★★) Soit f une fonction convexe sur un intervalle I ouvert.

1) Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en tout point de I.

2) Montrer que f est continue sur I.

Exercice 13. (★★★)

1) Montrer qu'une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est une fonction constante.

2) Montrer qu'une fonction convexe et bornée sur $\mathbb{R}_+$ est décroissante.

3) Donner un exemple d'une fonction convexe bornée sur $\mathbb{R}_+$ mais qui n'est pas constante.

Feuille d'exercice n° 30

Espaces vectoriels de dimension finie

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sauf indication contraire, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

Exercice 1 – Vrai ou faux ?. (★)

1) Une famille de $n+1$ vecteurs de E est génératrice.
2) Une famille de $n-1$ vecteurs de E est libre.
3) L'intersection de deux s.e.v de E est un s.e.v de dimension finie.
4) La somme de deux s.e.v de E est un s.e.v de dimension finie.
5) L'union de deux s.e.v de E est un s.e.v de dimension finie.
6) Si $f \in \mathscr{L}(E)$ n'est pas l'application nulle, alors $\mathrm{rg}(f) \geqslant 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \leqslant n-1$.
7) Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec F un e.v de dimension infinie, alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = n$.

Exercice 2. (★) Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels de dimension finie. On précisera leur dimension et une base.

1) $F = \big\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\big|\, \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\cos(2x) + b\cos(x) + c\big\}$.
2) L'ensemble des suites réelles arithmétiques.
3) $F_\alpha = \{P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x} \,|\, (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2\}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
4) $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
5) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{tr}(A) = 0\}$.
   On rappelle que $\mathrm{tr}(M)$ *est la somme des termes diagonaux d'une matrice* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. (★) Sous quelles conditions sur x les vecteurs $(0,1,x)$, $(x,1,-1)$ et $(x,1,1+x)$ forment-ils une base de $\mathbb{C}^3$ (vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel) ?

Exercice 4. (★) Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \,|\, P(2) = P(4) = 0\}$. Montrer que F est un s.e.v de $\mathbb{R}_4[X]$. En déterminer une base et sa dimension. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 5. (★) Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + 3z = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}((1,2,3))$. Montrer (sans expliciter les projections vectorielles) que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 6. (★) Soit $n \geqslant 1$. Notons $F = \mathrm{Vect}\big(X(X-1), (X-1)(X-2), X(X-2)\big)$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, X^3 | P\}$. Montrer (sans expliciter les projections vectorielles) que $F \oplus G = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 7. (★) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,2,-1,3)$, $(3,-2,0,1)$ et $(-5,6,-1,1)$. Déterminer une base de F et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 8. (★★) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, posons $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

1) Montrer que, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, X^j est combinaison linéaire de $P_j, \dots, P_n$.
2) En déduire que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 9. (★★) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une base constituée de matrices inversibles.

Exercice 10. (★★) Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension quelconque. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Montrer que, pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n) \leqslant \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) + n - p$.

Exercice 11. (★★) Soient H et K deux hyperplans de E. Soient φ et ψ deux formes linéaires non nulles telles que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $K = \mathrm{Ker}(\psi)$. Montrer que $H = K$ si et seulement si φ et ψ sont colinéaires dans l'espace vectoriel E^* (c'est-à-dire il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi = \lambda\psi$).

Exercice 12. (★★) Déterminer la dimension de l'intersection de deux hyperplans distincts de E.
On pourra commencer par montrer que la dimension est minorée par $n-2$.

Exercice 13. (★) Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $f(1,1,0) = (1,2,0)$, $f(1,0,1) = (3,-1,2)$ et $f(0,1,1) = (5,3,2)$. Déterminer le rang de f de deux façons différentes.

Exercice 14. (★★) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ n'étant pas l'application nulle. On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.

1) Montrer que $\mathrm{rg}(f) \leqslant n-1$.
2) Soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est libre.
3) En déduire que $p \leqslant n$.

Exercice 15. (★★) On suppose que, pour tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p(x) = 0$ (attention à l'ordre des quantificateurs). Montrer que f est nilpotent. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 16. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $Q = P(X+1) - P(x)$. Montrer que P est unique à l'addition d'un scalaire près.
On pourra introduire l'endomorphisme $f : P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto P(X+1) - P(x)$, déterminer son noyau et son image.

Exercice 17. (★★) Soient f et g des endomorphismes de E. Montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ puis que $|\,\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f-g)$.

Exercice 18. (★★) Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 1$.

Exercice 19. (★★) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

Exercice 20. (★) Montrer qu'une forme linéaire sur E qui n'est pas l'application nulle est surjective. Est-ce toujours vrai si E est de dimension infinie ?

Exercice 21. (★★★) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E.$$

On pourra jeter un oeil à l'exercice 17 de la feuille de TD n° 25.

Exercice 22. (★★★) Montrer que n est pair si et seulement si il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.
Pour le sens direct, on pourra se donner une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$ de E et construire f de telle sorte que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Exercice 23 – Polynôme d'interpolation de Lagrange. (★★★) Soient $a_0, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.

1) Montrer que l'application $f : P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto \big(P(a_0), \dots, P(a_n)\big) \in \mathbb{K}^{n+1}$ est un isomorphisme.
2) En déduire que, pour tout $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P qui vérifie $P(a_k) = b_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
3) Notons $(e_1, \dots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, expliciter $f^{-1}(e_{k+1})$. En déduire le polynôme P dont l'existence (et l'unicité) a été montrée dans la question précédente.

Nous avons rencontré ces polynômes, dit polynômes d'interpolation de Lagrange, dans la feuille de TD n° 15.

Exercice 24 – D'après EDHEC 1999. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, introduisons $f_k : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^k e^{-x}$. On note E_n le sous-espace vectoriel de $E = D^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ engendré par la famille $(f_0, \ldots, f_n)$. On note d l'application qui à toute fonction de E associe sa dérivée.

1) Montrer que d est une application linéaire sur E et que E_n est stable par d. On note alors d_n la restriction de d à E_n.
2) Montrer que la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est une base de E_n.
3) Calculer $d_n(f_0)$ puis montrer que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $d_n(f_k) = kf_{k-1} - f_k$.
4) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, notons $g_k : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{1}{k!} f_k$. Montrer que la famille
$$(-g_0, g_0 - g_1, g_1 - g_2, \ldots, g_{n-1} - g_n)$$
est une base de E_n.
5) a) Montrer que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $d_n(g_k) = g_{k-1} - g_k$.
   b) En déduire que $d_n \in GL(E_n)$.
   c) Exprimer $d_n^{-1}(f_j)$ dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$

Exercice 25. (★★★) On suppose dans cet exercice que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1) Soient $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E telle que $(x_1, \ldots, x_p, f(x_1), \ldots, f(x_{p-1}))$ est libre. Montrer que $(x_1, \ldots, x_p, f(x_1), \ldots, f(x_p))$ est également une famille libre.
2) a) Soit $x_1 \neq 0$. Montrer que $(x_1, f(x_1))$ est une famille libre.
   b) Montrer que, si $n \neq 2$, alors il existe x_2 tel que $(x_1, x_2, f(x_1))$ est une famille libre.
   c) En déduire que $n \geqslant 4$.
3) Montrer que n est pair.
4) Donner un exemple de tel endomorphisme f dans le cas où $n = 2$.

Exercice 26 – D'après les oraux HEC 2008. (★★) Supposons que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 - 2u + \mathrm{Id} = 0$.

1) Montrer que u est un automorphisme de E.
2) Comparer $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et en déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})) \geqslant \dfrac{n}{2}$.
3) Supposons que $\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})) = n - 1$.
   a) Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$. Justifier l'existence de $n - 1$ vecteurs $e_2, \ldots, e_n$ de E tels que $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $u(e_n) = e_1 + e_n$.
   b) Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Feuille d'exercice n° 31

Matrices et applications linéaires

Exercice 1. (★) Donner la matrice relativement aux bases canoniques, pour les applications linéaires suivantes :

1) $f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (2x - 3y + t, 9x - 4z) \in \mathbb{R}^2$.
2) $g : (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \longmapsto (x + 3z - t + 6u, x + 5y + t, -3x + y + 2z - 4u) \in \mathbb{R}^3$.
3) $h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (y - x, x, x - y, y, 0, x + y) \in \mathbb{R}^6$.
4) $u : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \longmapsto {}^tM$.
5) $\varphi : P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto \big(P(0), P'(0), P''(0)\big) \in \mathbb{R}^3$.
6) $\psi : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto P - X^3P' \in \mathbb{R}_4[X]$.

Exercice 2. (★) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ quelconque. Donner la matrice de $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \longmapsto AM + MA$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Exercice 3. (★)

1) Montrer que $\mathcal{B} = (1, X - 1, (X - 1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Montrer que $f : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto 2(X + 1)P - (X^2 - 2X + 1)P'$ est un endomorphisme.
3) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4. (★) Soit $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \longmapsto (1 - X^2)P' - XP$. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X])$ et donner sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Exercice 5. (★) Soit $\psi : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto \big(P(0), P'(0), P(1)\big) \in \mathbb{R}^3$.

1) Montrer que ψ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) Déterminer la matrice de ψ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$.
3) En déduire ψ^{-1}.

Exercice 6. (★) Déterminer la matrice de l'endomorphisme $u : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x-2z, x-2y-z, -x+y+2z)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En déduire une expression de u^3.

Exercice 7. (★) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est la matrice de l'endomorphisme $f : P \in \mathbb{R}_4[X] \longmapsto P(X + 1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$.
2) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.
3) En déduire que A est inversible et expliciter A^{-1} (sans faire de pivot de Gauss).

Exercice 8. (★) Soit E un espace de dimension 4 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On définit $f \in \mathscr{L}(E)$ par $f(e_1) = 3e_2 + e_3$, $f(e_2) = e_1 + e_4$, $f(e_3) = e_2 - e_1 + e_4$ et $f(e_4) = 2e_1 + 3e_2 + e_3 + 2e_4$.

1) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
2) Quel est le rang de f ? Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 9. (★) Soit $f : P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto P(X+1) - P(X)$

1) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ et déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2) Déterminer son rang. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.
3) Calculer $f(5X^3 + 3X + 4)$ à l'aide d'opérations matricielles.

Exercice 10. (★) Donner le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. (★) Donner sans calculs le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \cdots & n^2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. (★) Calculer le rang de $M - \lambda \mathrm{I}_3$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ lorsque

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. (★) Calculer le rang des applications linéaires de l'exercice 1.

Exercice 14. (★★) Donner le rang de la matrice $n \times n$ suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & n+1 & 2n+1 & \cdots & (n-1)n+1 \\ 2 & n+2 & 2n+2 & \cdots & (n-1)n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & 3n & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 15. (★★) Soit E le s.e.v de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions

$$f_1 : x \longmapsto e^{-x}, \qquad (x+1)e^{-x}, \qquad \text{et} \qquad f_3 : x \longmapsto (x^2 - 1)e^{-x}.$$

1) Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
2) Soit $d : f \in E \longmapsto f'$. Montrer que d est un endomorphisme de E et donner sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$.
3) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On pourra écrire $A = -\mathrm{I}_3 + N$ avec N une matrice dont les puissances sont faciles à calculer.
4) En déduire $f^{(n)}$ lorsque $f : x \longmapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 16. ($\bigstar$) Que renvoie la commande `rank(M)+size(kernel(M),'c')-size(M,'c')` si `M` est une matrice implémentée en Scilab ?

Exercice 17. ($\bigstar$) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que AB est inversible. Montrer que A et B sont inversibles ?

Exercice 18. ($\bigstar\bigstar$) Notons $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On note $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ où

$$u_1 = (1,1,1,1), \qquad u_2 = (1,1,-1,-1), \qquad u_3 = (1,-1,1,-1) \qquad \text{et} \qquad u_4 = (1,-1,-1,1).$$

1) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2) Soit f l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que $f(e_k) = u_k$ pour tout $k \in [\![1,4]\!]$.
   a) Justifier que $f \in GL(\mathbb{R}^4)$ et donner sa matrice dans la base $\mathcal{C}$.
   b) Expliciter f^2.
   c) Déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{C}$.
3) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites définies par $(x_0, y_0, z_0, t_0) \in \mathbb{R}^4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} 4x_{n+1} = x_n + y_n + z_n + t_n, \\ 4y_{n+1} = x_n + y_n - z_n - t_n, \\ 4z_{n+1} = x_n - y_n + z_n - t_n, \\ 4t_{n+1} = x_n - y_n - z_n + t_n. \end{cases}$$

   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = {}^t\!\begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n & t_n \end{pmatrix}$. Déterminer A tel que $X_{n+1} = AX_n$.
   b) En déduire que les quatre suites tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
4) On pose $E = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$ et $F = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})$.
   a) Montrer que $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.
   b) Montrer que $\dim(E) = 3$ puis qu'il existe une base $\mathcal{E}$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{E}$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. ($\bigstar\bigstar$) Soient $f : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right)$ et $g : P \in \mathbb{R}_2[X] \longmapsto P(1)$.

1) a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   b) Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On la notera A.
   c) f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
2) a) Montrer que g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
   b) g est-elle surjective ?
   c) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(g)$. L'application g est-elle injective ?
   d) En déduire, de deux façons différentes, la dimension de $\mathrm{Ker}(g)$.
3) Posons $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.
   a) Vérifier que $AB = BD$.
   b) Montrer que B est inversible et expliciter B^{-1}
   c) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de a, b et c.
5) En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \qquad \lim_{n\to+\infty} g(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,dt.$$