Lycée Carnot ECS1B – 2018/2019

Exercices de Mathématiques
Premier semestre

Matthias Gorny

Table des matières

Feuille d'exercice n° 1

Logique et raisonnements

I Éléments de logique

Exercice 1. (★) Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. A l'aide de tables de vérité, montrer que :

1) $((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{C}))$ (ou est distributive sur et),
2) $((\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{B}) \text{ et } \mathcal{C}) \Leftrightarrow ((\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{C}) \text{ ou } (\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{C}))$ (et est distributive sur ou).
3) (★★) $\big((\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \text{ et } (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})\big) \Rightarrow \big(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}\big)$ (transitivité de l'implication, syllogisme).

Exercice 2. (★) Décrire les parties $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, P(x)\}$ de $\mathbb{R}$ quand $P(x)$ est la proposition :

1) $(x > 1 \text{ et } x < 2) \text{ ou } (x = 1)$.
2) $x > 1 \text{ et } x < 6 \text{ et } x \neq 3$.
3) $(x \leqslant 1 \text{ et } x > 2) \text{ ou } (x = -5)$.
4) $x \leqslant 1 \implies x \leqslant 0$.

Exercice 3. (★) Écrire la négation des phrases suivantes :

1) $x > 3 \implies f(x) \leqslant 5$
2) $-4 \leqslant x < 2$.
3) $y < -3 \text{ ou } y > 12$.
4) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$.
5) Si $r \in \mathbb{Q}$, alors $r^2 \in \mathbb{Q}$.
6) $(x > -1 \text{ et } f(x) = 0) \text{ ou } (x \leqslant -1 \text{ et } g(x) = 0)$.
7) Tous les élèves de moins de quinze ans ou de plus de dix-huit ans ont une note comprise entre 8 et 15.
8) Il n'a plu qu'un seul jour cette semaine.
9) (★★) $\exists! z \in E, g(z) = 0$.

Exercice 4. (★) Pour chacune des propositions suivantes, étudier si elle est vraie ou fausse et écrire sa négation.

1) Tous les chats sont gris.
2) Toute fonction continue est dérivable.
3) La forme géométrique $\bigcirc$ est de couleur rouge ou est un carré.
4) Si Mozart a composé *Le lac des cygnes*, alors $1 + 1 = 3$.
5) Si un élève ne connait pas son cours en colle de Maths, alors il aura strictement moins de 10.

Exercice 5. (★) Montrer que les phrases « Ceux qui parlent ne savent pas » et « Ceux qui savent ne parlent pas » sont équivalentes.

Exercice 6. (★) Traduire avec des quantificateurs les phrases suivantes :

1) L'entier 5 est impair.
2) La fonction sinus est à valeurs dans $[-1, 1]$.
3) Tout nombre complexe égal à son conjugué est un nombre réel.
4) L'équation $\ln(x) - x + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
5) L'exponentielle de tout réel est strictement positive.
6) La fonction polynômiale $P : x \longmapsto x^2 + x + 1$ n'admet pas de racine réelle.

Exercice 7. (★★) Pour chacune des propositions suivantes, étudier si elle est vraie ou fausse et écrire sa négation. Rédiger également en français chaque proposition si elle est vraie, sa négation si elle est fausse.

1) $\exists y \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, xy = 1$.
2) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists k \in \mathbb{N}, x^k \geqslant 2$.
3) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \big(x^n = y^n \text{ et } x \neq y\big)$.
4) (★★★) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \left(n \geqslant n_0 \implies \dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon\right)$.

Exercice 8. (★) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en langage mathématique les phrases suivantes, puis les nier :

1) f est strictement croissante.
2) f est minorée par le réel m.
3) f est majorée.
4) f est constante.
5) f est la fonction nulle.
6) f s'annule.
7) f est 2π-périodique.
8) f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Exercice 9. (★) Pour chacune des questions suivantes, mettre le bon signe ($\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$) entre les deux propriétés P et Q. Reformuler ensuite ces phrases en termes de conditions nécessaires, suffisantes ou les deux.

1) P : « $\sin(x) = 0$ ». Q : « $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$ ».
2) P : « $2x - 5 = x^5 - 3x$ ». Q : « $e^{x^5} = \left(e^{x-1}\right)^5$ ».
3) P : « $z \in \mathbb{C}$ ». Q : « $\exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \theta \in \mathbb{R},\ z = re^{i\theta}$ ».
4) P : « n est divisible par 9 ». Q : « n n'est pas un nombre premier ».
5) P : « $\mathbb{P}(A) \neq 0$ ». Q : « $\mathbb{P}(A) > 0$ ».

Ici A est un événement et $\mathbb{P}(A)$ désigne sa probabilité.

II Raisonnements usuels

Exercice 10. (★) Un scénario de Lewis Carroll : *De deux choses l'une : ou bien le malfaiteur est venu en voiture, ou bien le témoin s'est trompé. Si le malfaiteur avait un complice, alors il est venu en voiture. Le malfaiteur n'avait pas de complice et n'avait pas la clé, ou le malfaiteur avait un complice et avait la clé. Le malfaiteur avait la clé. Que faut-il conclure de tout cela ? Que peut-on conclure dans le cas où le malfaiteur n'avait pas la clé ?*

Exercice 11. (★★) Montrer les propositions suivantes par l'absurde ou pas contraposée :

1) Si a et b sont deux entiers tels que $b \neq 0$, alors $a + b\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *(on admet que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)*.
2) Soit n un entier naturel. Montrer que, si $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
3) Soit x un réel. Montrer l'implication : $\left(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leqslant \varepsilon\right) \ \Rightarrow\ x = 0$.
4) Si x est un irrationnel positif, alors $\sqrt{x}$ est irrationnel.

Exercice 12. (★★) Dans le plan, on considère $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ des cercles de rayon 1 et de centres respectifs $A(a, \alpha)$ et $B(b, \beta)$. On rappelle que la distance entre A et B est donnée par la formule $d(A, B) = \sqrt{(a-b)^2 + (\alpha - \beta)^2}$. On note P la proposition « Les cercles $\mathscr{C}_A$ et $\mathscr{C}_B$ s'intersectent » et Q la proposition « $d(A, B) \leqslant 2$ ».

1) Écrire en français ce que signifient :
   a) la contraposée de l'implication $Q \ \Rightarrow\ P$,
   b) la réciproque de l'implication $P \ \Rightarrow\ Q$,
   c) la contraposée de la réciproque de l'implication $\mathrm{non}(P) \ \Leftarrow\ Q$.
2) Écrire avec des quantificateurs la proposition P, puis sa négation.
3) Ecrire le début de la rédaction des raisonnements suivants :
   a) Prouver $Q \ \Rightarrow\ P$ par contraposée.
   b) Prouver $P \ \Rightarrow\ Q$ par l'absurde
   c) Prouver la contraposée de la réciproque de $Q \ \Rightarrow\ P$ par l'absurde.

Exercice 13. (★★★) A l'aide d'un raisonnement par analyse/synthèse, déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que, pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 14. (★★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $a_n = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17.
On rappelle qu'un entier a est divisible par un entier b si il existe un entier c tel que $a = bc$.

Exercice 15. (★★) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \ldots, p_k$ des nombres premiers. Montrer que l'entier $N = 1 + p_1 p_2 \ldots p_k$ n'est divisible par aucun des p_i, $i \in [\![1, k]\!]$. En déduire, par l'absurde, qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Feuille d'exercice n° 2

Ensembles de nombres, calculs algébriques et inégalités

I Nombres réels, équations, inéquations

Exercice 1. (★) Déterminer (sans calculatrice) le signe des expressions suivantes :

1) $\dfrac{1}{6}-\dfrac{9}{35}+\dfrac{3}{10}-\dfrac{6}{21}$, 2) $\dfrac{7}{4}-\sqrt{3}$, 3) $3\sqrt{5}-2\sqrt{19}+\sqrt{7}$, 4) $\pi-\sqrt{10}$

Exercice 2. (★) Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geqslant 2$.

Exercice 3. (★) Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
Indication : on utilisera, après l'avoir montré, le fait qu'un entier naturel et son carré ont la même parité.

Exercice 4. (★★) Soient x, y et z des nombres réels.

1) Étudier le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité triangulaire renversée.
2) Montrer que $xy\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$ avec égalité si et seulement si $x=y$.
3) Montrer que $(x+y)^2\leqslant 2(x^2+y^2)$ avec égalité si et seulement si $x=y$.
4) Montrer que $|x|+|y|\leqslant|x+y|+|x-y|$ avec égalité si et seulement si $x=y$ ou $x=-y$.
5) Montrer que $xy+yz+xz\leqslant x^2+y^2+z^2$ avec égalité si et seulement si $x=y=z$.

Exercice 5. (★)

1) Calculer $\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor$ pour tout réel x.
2) Montrer que, pour tous réels x et y, $\lfloor x+y\rfloor-\lfloor x\rfloor-\lfloor y\rfloor\in\{0,1\}$.
3) Montrer que, pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$, $\lfloor x+n\rfloor=\lfloor x\rfloor+n$.

Exercice 6. (★) Résoudre l'équation $\lfloor 2x+5\rfloor=\lfloor x-1\rfloor$, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.
Indication : on pourra différencier les cas où $\lfloor x\rfloor\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1/2$ et $\lfloor x\rfloor+1/2\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1$.

Exercice 7. (★) Simplifier les expressions suivantes (fractions irréductibles, puissances de nombres premiers) :

$$2^{n+1}-2^n,\quad 3^n+3^n+3^n,\quad \left(5^{5^n}\right)^{5^n},\quad \frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}},\quad \frac{1}{\sqrt{x^4+4}+\sqrt{x^4+3}},$$

avec $n\in\mathbb{N}$ et x, y des réels tels que $0<|y|\leqslant|x|$.

Exercice 8. (★) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

1) $|7x-4|=|3-2x|$,
2) $|x-19|=|x+11|$,
3) $13x-5x^2=9$,
4) $(9-x)(x+3)=30$,
5) $6x^4+11x^2-7=0$,
6) (★★) $\sqrt{1+x}-\sqrt{4-x}=2$,

Exercice 9. (★) Résoudre le système d'équation $\begin{cases}3x+y=12\\ xy=9\end{cases}$ d'inconnues x et y dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10. (★) Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $|2x-5| < |x+3|$,
2) $x^2 - 4|x| \leqslant 5$,
3) $23x - 12x^2 \geqslant 10$,
4) $e^x > 1 + 6e^{-x}$,
5) $2(x-2)(1-2x)+1 < x(x+3)$,
6) $\dfrac{1}{3x^2+2x+4} \geqslant \dfrac{2}{5x^2+6x+1}$,

Exercice 11. (★★) Résoudre l'inéquation $2y - 5 - \sqrt{4y-7} < 0$, d'inconnue $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 12. (★) Soient a, b, c et x des réels avec $a \neq 0$. Sous quelles hypothèses a-t-on $ax^2+bx+c<0$?

Exercice 13. (★★) Simplifier $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

Exercice 14. (★) Déterminer $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right[$ et $\beta \in \left]-\dfrac{\pi}{5}, 0\right]$ tels que $\dfrac{19\pi}{12} \equiv \alpha \left[\dfrac{\pi}{3}\right]$ et $\dfrac{19\pi}{12} \equiv \beta \left[\dfrac{\pi}{5}\right]$.

II Manipulation de sommes et de produits

Exercice 15. (★) Réexprimer les sommes suivantes avec le symbole $\sum$:

1) $2+4+6+8+\cdots+104$,
2) $1+4+9+16+25+36+49+\cdots+361$,
3) $2+4+8+16+32+\cdots+1024$,
4) $1+2^7+3^6+4^5+5^4+6^3+7^2+8$,
5) $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{19} - a_{20}$,
6) $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5 + \cdots + a_{30}a_{31}$,
7) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^2}{4} + \cdots + \dfrac{x^{38}}{40}$.

Exercice 16. (★) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient p et n des entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Calculer les sommes

$$\sum_{k=p}^{n} k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=p}^{n} x^k.$$

Exercice 17. (★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

- la somme des entiers pairs de 0 à $2n$,
- la somme des entiers impairs de 1 à $2n+1$.

Exercice 18. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{i=n}^{3n+1} 2^{i+1}, \quad \sum_{j=1}^{n} \sqrt{2^j}, \quad \sum_{j=0}^{2n} \frac{7^j - 2\cdot 3^{2j}}{5^j}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 3^{2k-1}, \quad \sum_{k=1}^{2n-1} 2^{k/2}, \quad \sum_{k=1}^{n} \ln(k),$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} (n\ell - 1), \quad \sum_{k=1}^{n} k\cdot k!, \quad \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right), \quad (\bigstar\bigstar) \sum_{k=2}^{n} k \ln\left(1-\frac{1}{k}\right), \quad (\bigstar\bigstar) \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k.$$

Exercice 19. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les produits suivants :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+5}{2k+7}, \quad \prod_{i=1}^{n} 2^{1-i^2}, \quad \prod_{k=2}^{n+1} \left(1-\frac{1}{k^2}\right), \quad \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$

Exercice 20. (★★★)

1) Déterminer deux réels α et β tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)} = \dfrac{\alpha}{k+1} + \dfrac{\beta}{k+3}$. En déduire une expression de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$, où $n \in \mathbb{N}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 21. (★★)

1) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x^{2^k}+1) = \frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sqrt{\frac{3}{4n+3}} < \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{4k+3}\right) < \sqrt{\frac{5}{4n+5}}$.

Exercice 22 – Inégalité de Cauchy-Schwarz. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ des réels.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$.

   Indication : on pourra étudier le trinôme du second degré $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\big(|x_i|+X|y_i|\big)^2$.

2) Application : montrer que $\displaystyle\frac{6n}{(n+1)(2n+1)} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

III Factorielles et coefficients binomiaux

Exercice 23. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire, à l'aide de factorielles,

$$\prod_{i=0}^{n}(i+2), \qquad \prod_{j=1}^{n}(j-1), \qquad \prod_{k=1}^{n}(n+k), \qquad \prod_{\ell=1}^{n}\ell^2(\ell+1)^3.$$

Exercice 24. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire, en fonction de 2^n, $n!$ et $(2n+1)$,

- le produit des entiers pairs de 2 à $2n$,
- le produit des entiers impairs de 1 à $2n+1$.

Exercice 25. (★) A l'aide d'une factorisation, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $10^n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 26. (★★) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4^n(n!)^3 < (n+1)^{3n}$.

Exercice 27. (★★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k k\binom{n}{k}.$$

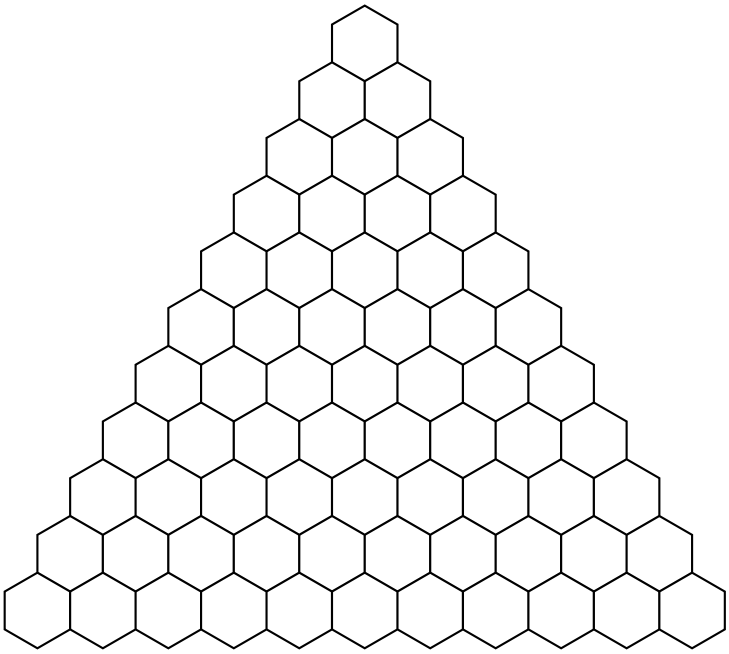
Exercice 28. (★★) Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$. Montrer que

$$\sum_{i=p}^{n}\binom{i}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 29. (★) Montrer de deux manières différentes que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

Exercice 30. (★) Le triangle de Pascal est un tableau triangulaire tel que le nombre dans la case à l'intersection de la ligne $n \in \mathbb{N}$ (attention la première ligne est la ligne 0) et de la colonne $k \in [\![0, n]\!]$ est $\binom{n}{k}$. On le construit de haut en bas de façon algorithmique à l'aide de la formule de Pascal.
Construire le triangle de Pascal (sous forme pyramidale) limité à $n = 10$.



IV Sommes doubles

Exercice 31. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i, \qquad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} j^2, \qquad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j), \qquad \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i+j), \qquad \sum_{(i,j) \in A_n} (i+j)$$

où $A_n = \{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \,|\, k + \ell = n\}$.

Exercice 32. (★★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n} \frac{k}{1+\ell}, \qquad \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j), \qquad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{\min(i,j)}, \qquad \sum_{1 \leqslant p,q \leqslant n} n^{p+q}, \qquad \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1}{2^{|i-j|}}.$$

Exercice 33. (★★★) Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels. Notons $m = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$. Montrer la formule de Huygens-König :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - m^2.$$

Feuille d'exercice n° 3

Étude de fonctions

I Images, antécédents, composition de fonctions

Exercice 1. (★)

1) Quels sont les antécédents de $-\sqrt{3}$, π, 4 et 144 par $f : x \longmapsto (x-4)^2$?
2) Quels sont les antécédents de -32 et 243 par $f : x \longmapsto x^5$?

Exercice 2. (★ à ★★) Déterminer $f(I)$ dans les cas suivants :

1) $f : x \longmapsto x^2$ et $I =]-3, +\infty[$,
2) $f : x \longmapsto 2 - x^3$ et $I =]2, +\infty[$,
3) $f : x \longmapsto 1 - |x+2|$ et $I = [-4, -\frac{1}{2}[$,
4) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $I =]-4, 0[\cup]0, 3]$,
5) $f : x \longmapsto \dfrac{(x+1)(x-1)}{x^2}$ et $I =]-3, 0[\cup]0, 2]$.

On rappelle que, si I est intervalle sur lequel est définie la fonction f, alors $f(I)$ est l'ensemble des images de x par f quand x décrit I, c'est-à-dire $f(I) = \{f(x) \,|\, x \in I\}$.

Exercice 3. (★ à ★★) Pour les fonctions f et g définies par les expressions suivantes, donner le domaine de définition et une expression de $f \circ g$ et $g \circ f$. On commencera bien entendu par donner les domaines de définitions de f et g.

1) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = x^2$,
2) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ et $g(x) = x^6$,
3) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$,
4) $f(x) = \tan(x)$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,
5) $f(x) = (\ln(x))^2$ et $g(x) = x^2 - 7x + 10$,
6) $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \ln(x^2 - 1)$,
7) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \ln(x^2 - 1)$,
8) $f(x) = e^x$ et $g(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x}$.

II Propriétés globales des fonctions réelles de la variable réelle

Exercice 4. (★) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications telles que $f(I) \subset J$.

1) Montrer que, si f et g ont même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante.
2) Montrer que, si f et g sont de monotonies contraires, alors $g \circ f$ est décroissante.

Exercice 5. (★★) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la fonction $f \circ f$ est croissante et la fonction $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 6. (★★) Soit I un intervalle symétrique de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire tel que, pour tout $x \in I$, $-x \in I$). Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions paires ou impaires, que dire des fonctions $f + g$ et fg ?

Exercice 7. (★★) Que dire d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles qui est à la fois monotone et périodique ?

Exercice 8 – Autres propriétés de symétrie. (★★) Soient a et b deux réels. Justifier qu'une fonction $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite

- symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ lorsque, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $a + x \in D_f$, on a $a - x \in D_f$ et $f(a+x) = f(a-x)$.
- symétrique par rapport au point de coordonnées (a, b) lorsque, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $a + x \in D_f$, on a $a - x \in D_f$ et $f(a+x) + f(a-x) = 2b$.

III Étude de fonctions

Exercice 9. (★) Donner l'équation de la droite (D) du plan passant par les points de coordonnées $(1, 5)$ et $(-3, 2)$. Donner l'équation de la droite (Δ) du plan de coefficient directeur $-1/2$ et passant par le point $(4, 6)$. Déterminer les coordonnées du point d'intersection, s'il existe, de (D) et (Δ).

Exercice 10. (★★) Considérons les fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2+4x-6}{2x-3}$ et $g : x \longmapsto x^2+5x+2$.
Notons $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé.

1) Déterminer les domaines de définition, les variations et les limites des fonctions f et g.
2) Montrer que $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(3/2, 5)$ et que $\mathscr{C}_g$ est symétrique par rapport à la droite $x = -5/2$. *Ces notions sont définies dans l'exercice 8*
3) Tracer $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 11. (★★) Étudier la fonction $f : x \longmapsto \ln(x^{3/4}-1)$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Montrer (sans utiliser le théorème de la bijection) que f admet une application réciproque que l'on explicitera.

Exercice 12. (★★) Étudier et tracer la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Exercice 13. (★ à ★★) Étudier (domaine de définition, variation, limites, courbes) les fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \ln(x^2+x+2)$,
2) $x \longmapsto x^2-8x+15-|4-x|$,
3) $x \longmapsto \sqrt[4]{x^2-2x-3}$.
4) $x \longmapsto -\ln(|x^2-3x+2|)$,
5) $x \longmapsto \dfrac{x^3+x^2-2x-3}{2x^2-6}$,
6) $x \longmapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{x^2+x+2}\right)$,
7) $x \longmapsto \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{3}\sqrt{|x^2-16|}$,
8) $x \longmapsto \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,
9) $x \longmapsto x^{x^3}$,
10) (★★★) $x \longmapsto x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$.

Pour les questions 5) et 7), on déterminera des droites asymptotes en $\pm\infty$.

IV Inégalités, équations, inéquations

Exercice 14. (★★) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant x-1$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 15. (★★) Montrer que

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x \leqslant e^x$.
2) Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(x)| \geqslant |x|$.
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x-\dfrac{x^3}{3!} \leqslant \sin(x) \leqslant x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$.
4) Pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x)$.

Exercice 16. (★) Résoudre les équations

1) $|4-x|-|x+2|+|3x+5| = 9$,
2) $2e^x-35e^{-x} = 9$,
3) $2(\ln(x))^2 = 12+5\ln(x)$,
4) (★★) $x^x = \dfrac{3}{4}\sqrt{6}$,

Exercice 17. (★★) Résoudre les inéquations, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

1) $|x+3|+|1-3x| > -2$
2) $x-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$,
3) $\ln(-x-3)-\ln(x-5)+\ln(x+4) \geqslant 0$,
4) $\ln(-x-3) \geqslant \ln\left(\dfrac{x-5}{x+4}\right)$.

Exercice 18. (★) Résoudre les inéquations, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$,

1) $2^n \geqslant 1000000$,
2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k \geqslant \frac{7}{2}$,
3) $\dfrac{\ln(2n)}{\ln(\pi/4)}+\ln(5) \leqslant 3\ln(2)$

Feuille d'exercice n° 4

Trigonométrie et nombres complexes

I Trigonométrie

Exercice 1. (★ à ★★) Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1) $\cos(3x) - \sin(x) = 0$,
2) $\sin(2x) + \sin(6x) = 0$,
3) $\tan(2x) = 2\tan(x)$,
4) $\sin(7x) + \sin(3x) = \sqrt{3}\sin(5x)$,
5) $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$,
6) $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = -\sqrt{2}$.
7) $\sin(x) \leqslant -\dfrac{1}{2}$.
8) $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) > -1$.
9) $\sin^2(x) + 3\cos(x) < 1$.

Exercice 2. (★) Donner une valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{16}\right)$.

Exercice 3. (★) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Exprimer $\cos^3(\theta)\sin(\theta)$ en fonction $\sin(4\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
2) Exprimer $\sin(7\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

II Conjugués, modules et arguments d'un nombre complexe

Exercice 4. (★) Mettre les complexes suivants sous forme algébrique (c'est-à-dire sous la forme $x + iy$ avec x et y deux réels) :

$$\frac{5-7i}{3-2i}, \qquad \frac{i\sqrt{3}-3}{i-\sqrt{3}}, \qquad (-i)^{2018}, \qquad 2\pi e^{i\pi/8}, \qquad \frac{(i-2)^3 + 2i\sqrt{5} + 9}{(1-i\sqrt{2})^2 + 3}, \qquad j + 2j^2 + 3j^3.$$

Exercice 5 – Technique de l'arc-moitié. (★) Soient a et b deux réels. Mettre les complexes $e^{ia} + e^{ib}$ et $e^{ia} - e^{ib}$ sous forme exponentielle.

Exercice 6. (★) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument des complexes suivants :

$$\sqrt{3} + i, \quad -2e^{2i\pi/7}, \quad e^{2i\theta} + 1, \quad \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^n, \quad \left(1 + e^{i\theta}\right)^n, \quad \frac{1}{(\sqrt{3}+3i)^4}, \quad (1-i)^n - (1+i)^n$$

Exercice 7. (★) Écrire $z = \dfrac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$ sous forme algébrique et sous forme trigonométrique. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 8 – Formule du parallélogramme. (★★) Montrer que, pour tous complexes z et z',

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

Pourquoi l'appelle-t-on formule du parallélogramme ?

Exercice 9. (★★) On dit qu'un entier n est somme de deux carrés d'entiers si il existe x et y dans $\mathbb{N}$ tels que $n = x^2 + y^2$. Montrer qu'un produit fini de tels entiers est encore la somme de deux carrés d'entiers.

Exercice 10. (★★) Soient z et z' deux complexes de module 1 et tels que $zz' \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est un réel.

Exercice 11. (★) Soient s, t et u des complexes de module 1. Montrer que $|st + tu + us| = |s + t + u|$.

III Calculs de sommes

Exercice 12. (★★) Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kz^k$. *On ira jeter un œil au DM n° 1.*

Exercice 13. (★★) Soient $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$,
2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a+k\theta)$,
3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta)$,
4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k \cos(k\theta)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} r^k \sin(k\theta)$.

Exercice 14. (★★) Simplifier la fraction $\dfrac{1-\cos(3\theta)+\cos(6\theta)-\cos(9\theta)}{\sin(3\theta)-\sin(6\theta)+\sin(9\theta)}$ lorsque $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que le dénominateur est non nul.

Exercice 15. (★★) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$.

IV Racines carrées et équations du second degré

Exercice 16. (★★) Déterminer les racines carrées des complexes suivants : i, $1-i$, $5+4i$ et $5\sqrt{3}+2i\sqrt{2}$.

Exercice 17. (★★) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1) $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$,
2) $z^2 + 5iz + 4 = 0$,
3) $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$,
4) $(z-i)^2 = -(z+1-i)^2$.

Exercice 18. (★★) Résoudre le système d'équation $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases}$, d'inconnues x et y dans $\mathbb{C}$.

V Racines $n^{\text{ièmes}}$

Rappelons que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$, l'équation $z^n = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement n solutions. Les techniques peuvent servir, mais les résultats théoriques sont hors programme.

Exercice 19. (★★ à ★★★) Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1) $z^3 = \dfrac{i+\sqrt{3}}{i-\sqrt{3}}$,
2) $z^3 + 3z - 2i = 0$,
3) $z^6 + z^3 + 1 = 0$,
4) $z^3 - i = 6(z+i)$,
5) $z^4 = -7-24i$,
6) $z^4 = z + \overline{z}$,
7) $\overline{z^7} = \dfrac{1}{z^3}$,
8) $z^n + 2z^{n-1} + 2z^{n-2} + \cdots + 2z^2 + 2z + 1 = 0$.

Exercice 20. (★★★) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \zeta_k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k^p$, où $\zeta_k = e^{2ik\pi/n}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

Les nombres $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ sont les n racines de $n^{\text{ième}}$ de l'unité, c'est-à-dire les n solutions de l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 21. (★★★) Résoudre de deux façons l'équation $(z+i)^5 = (z-i)^5$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
En déduire que $\tan(\pi/5) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\tan(2\pi/5) = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Feuille d'exercice n° 5

Généralités sur les suites réelles

Exercice 1. (★) Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence, donner une expression du terme général en fonction de n et étudier les variations.

1) $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^2}, \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_0 = -2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + u_n = \pi, \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = 4, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{5}, \end{cases}$

4) $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}, \end{cases}$

5) $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = \dfrac{2}{3}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + 4u_n = 2u_{n+1}, \end{cases}$

6) $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 7u_{n+1}, \end{cases}$

Exercice 2. (★) Donner une expression explicite du terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = -1$, $v_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{u_{n-1}}{6} + 5 \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Exercice 3. (★) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 5u_n + 4v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 4u_n + 5v_n.$$

1) Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2) Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
3) En déduire une expression des termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4. (★) Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = e$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1}u_n$.

Exercice 5 – D'après ESCP. (★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n.$$

1) Déterminer α pour que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $s_n = \alpha n(-1)^n$, vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_n - s_n$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire son terme général (que l'on exprimera en fonction de v_0 et v_1).
3) En déduire une expression de u_n en fonction de u_0, u_1 et n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{5u_n + 7}$. On suppose que u_0 est tel que la suite est bien définie. On dit qu'il s'agit d'une suite homographique. Posons

$$f : x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{7}{5}\right\} \longmapsto \frac{4x+2}{5x+7}.$$

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions ℓ et ℓ' (avec $\ell < \ell'$).
2) On suppose désormais que $u_0 \neq \ell$. Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \ell$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \dfrac{u_n - \ell'}{u_n - \ell}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
4) En déduire une expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 3}$. On suppose que u_0 est tel que la suite est bien définie. Il s'agit aussi d'une suite homographique. Posons

$$f : x \in \mathbb{R}\backslash\{3\} \longmapsto \frac{x-4}{x-3}.$$

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ.
2) On suppose désormais que $u_0 \neq \ell$. Montrer qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \ell$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = \dfrac{1}{u_n - \ell}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.
4) En déduire une expression du terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8 – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : une autre preuve. (★★) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

1) a) Soit r une solution complexe de l'équation $x^2 = ax + b$. Justifier que $r \neq 0$.
   b) Que dire de $\dfrac{-b}{r}$?
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{r^n}$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.
   a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique donc on précisera la raison.
   b) A l'aide d'une somme télescopique, en déduire une expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   On distinguera deux cas selon que $b + r^2$ est nul ou non.
   c) En déduire une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   d) Retrouver le théorème du cours dans le cas où $\Delta = a^2 + 4b \geqslant 0$.
   e) (★★★) Plus dur : retrouver le théorème du cours dans le cas où $\Delta < 0$.

Feuille d'exercice n° 6

Convergence de suites réelles

I Majorants, minorants, bornes supérieures et inférieures

Exercice 1. (★ à ★★) Déterminer, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

1) $]-5,2]$,
2) $\mathbb{R}_+^*$,
3) $]-7,-3]\cup]6,7]$,
4) $\{3+4n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$,
5) $\left\{\dfrac{1}{3n}-\dfrac{2}{n^2}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*\right\}$,
6) $\{(1+(-1)^n)e^n\,|\,n\in\mathbb{N}\}$,
7) $\left\{\dfrac{(-1)^{-n}-1}{4^n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$,
8) $\left\{\sin\left(\dfrac{2k\pi}{7}\right)\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$,
9) $\left\{\dfrac{1}{1-x}\,\middle|\,x\in]1,+\infty[\right\}$,

Exercice 2. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On pose $A+B=\{a+b\,|\,a\in\mathbb{R},\,b\in\mathbb{R}\}$, l'ensemble des réels qui s'écrivent comme la somme d'un réel de A et d'un réel de B. Supposons que A et B soient deux parties majorées.

1) (★) Montrer que $A+B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A+B)\leqslant\sup(A)+\sup(B)$.
2) (★★★) Montrer que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.

Exercice 3. (★★) Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui vérifie $x_n\geqslant\sup(A)-\dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En déduire qu'elle converge vers $\sup(A)$.

II Convergence de suites réelles

Exercice 4. (★ à ★★) Étudier la nature des suites de termes généraux suivants et préciser leur éventuelle limite.

1) $\ln(n+1)$,
2) e^{n^α}, $\alpha>0$,
3) e^{1/n^α}, $\alpha>0$,
4) $n^{1+\sqrt{n}}$,
5) $\dfrac{(-3)^n}{n^2}$,
6) $\dfrac{e^{-n^2}}{n^3}$,
7) $n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,
8) $\dfrac{\ln(n^3)}{n\sqrt{n}}$,
9) $\dfrac{n!}{n^n}$,
10) $\dfrac{8^n}{e^{3n}}$,
11) $2^{2n}e^{-3n}$,
12) $\dfrac{3^n-e^n}{3^n+e^n}$,
13) $\dfrac{\sin(n^ne^{n^3})}{n^{3/2}}$,
14) $\dfrac{1}{n}\ln(n+e^{-n})$,
15) $\dfrac{(-1)^{n^2}+(n+1)^2+\cos(1-n)}{4n^2+\sin(\sqrt{n})+10n\ln(n)}$,
16) $\sqrt{n^3+n+1}-\sqrt{n^3-n+1}$,
17) $\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}-\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}$,
18) $-n^3+\sqrt{n^6+\sin(10^n)}$,
19) (★★★) $\cos(n)$,
20) (★★★) $\sin(n)$.

Les opérations vues en cours sur les suites admettant des limites (finies ou infinies) joueront un rôle capital dans la résolution de cet exercice. On n'utilisera pas de compositions de limites (nous reverrons des exemples lors du chapitre Limite et continuité*) et on se ramènera plutôt à des minorations ou majorations avec des suites de référence. Certaines inégalités vues dans la feuille d'exercice précédentes pourront être utiles. Pour les points 19) et 20), on pourra raisonner par l'absurde.*

Exercice 5. (★★) Soient $q\in]0,+\infty[$, $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\beta\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n=\dfrac{q^n+n^\alpha}{1+\big(\ln(n)\big)^\beta}$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de q, α et β.

Exercice 6. (★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$, $u_1=0.3$, $u_2=0.33$, $u_3=0.333$, $u_4=0.3333...$ et de manière générale, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=0.\underbrace{33333\cdots333}_{n\text{ fois}}$. Montrer que la suite converge vers un réel que l'on précisera.

Exercice 7. (★★) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. En déduire les limites des suites de termes généraux :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 8. (★★)

1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs et telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que, si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

2) Application aux suites sous-géométriques : Soient $q \in]0,1[$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leqslant q a_n$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 9. (★★) Soient a_0 et b_0 deux réels strictement positifs tels que $a_0 < b_0$. Nous définissons deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les réels a_n et b_n sont bien définis et vérifient $0 < a_n < b_n$.
2) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
On pourra montrer que la suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sous-géométrique et utiliser le résultat de l'exercice 8.
3) Écrire un programme `Scilab` qui prend en entrée a_0, b_0, n et renvoie les valeurs de a_n et b_n.

Exercice 10. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs telle que $(\sqrt[n]{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.

1) Si $\ell < 1$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2) Si $\ell > 1$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.
3) Que dire sur la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $\ell = 1$?

Exercice 11. (★★) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est appelée la série harmonique.

1) Déterminer une constante c strictement positive telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant c$.
2) Déterminer la nature de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et sa limite éventuelle.

Exercice 12. (★★★) Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire.

Exercice 13 – Suite définie implicitement. (★★★) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $P_n(x) = -1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, que l'on note x_n.

Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2) Calculer x_1 et x_2.
3) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1}(x_n) > 0$.
   b) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et que, pour tout $n \geqslant 2$, $x_n < 1$.
4) a) Calculer $P_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $x_n > \dfrac{1}{2}$.
   b) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right[$.
   c) Montrer que, pour tout n assez grand, $x_n \leqslant \dfrac{\ell+1}{2}$. En déduire que $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
5) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $1 - x_n = x_n(1 - x_n^n)$. En déduire que $\ell = \dfrac{1}{2}$.

III Suites récurrentes

Exercice 14. (★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n - 3)^2$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
2) Étudier les variations de $f : x \in [0,3] \longmapsto \dfrac{1}{3}(x-3)^2$. En déduire les sens de variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
3) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites distinctes.
4) Est-ce-que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

Exercice 15. (★★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \dfrac{u_n^2}{9}$.

1) a) Dresser le tableau de variations de $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 4 - \dfrac{x^2}{9}$.
   b) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   c) Montrer qu'il existe des réels λ, a, b et c tels que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f \circ f(x) - x = \lambda(x-3)(x+12)(ax^2+bx+c).$$
   En déduire les points fixes de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}$.
2) Caractériser la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $|u_0| = 12$.
3) Supposons que $|u_0| > 12$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < -12$.
   b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite (que l'on explicitera).
4) Supposons que $|u_0| < 12$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-12 < u_n \leqslant 4$.
   b) Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_k \in [0,4]$. Montrer que, pour tout $n \geqslant k$, $u_n \in [0,4]$. En déduire que, dans ce cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 3.
   On étudiera les variations et la nature des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
   c) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin [0,4]$. A quel intervalle appartiennent les termes de la suite (à partir du rang 1) ? Quel est son sens de variations. Montrer que l'on aboutit à une contradiction.
   d) Conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 16. (★★★) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$, $u_1 > u_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n}$.

1) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et croissante et convergente et déterminer sa limite. Montrer que l'on aboutit à une contradiction et conclure.
2) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.
3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = |u_n - 2|$. Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_{n+2} \leqslant \dfrac{v_{n+1} + v_n}{3}$.
4) On considère $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_{n_0} = v_{n_0}$, $w_{n_0+1} = v_{n_0+1}$ et, pour tout $n \geqslant n_0$, $w_{n+2} = \dfrac{w_{n+1} + w_n}{3}$.
   a) Comparer les termes v_n et w_n pour tout $n \geqslant n_0$.
   b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

Feuille d'exercice n° 7

Ensembles et applications

I Ensembles

Exercice 1. (★) Soit $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$ l'ensemble des chiffres du système hexadécimal. Considérons les trois parties : $X = \{A,B,E,F\}$, $Y = \{0,2,4,6,8,A,C,E\}$ et $Z = \{3,5,7,9\}$. Donner en extension les parties

$$\overline{X},\quad \overline{Y},\quad \overline{Z},\quad X\cap Y,\quad Y\cup\overline{X},\quad X\backslash Z,\quad \left(\overline{(\overline{Y}\cap X)\cup Z}\right)\backslash Y.$$

Exercice 2. (★) Donner en extension l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ quand E est l'un des ensembles suivants

$$\mathcal{P}(\varnothing),\qquad \{a,\{b\}\},\qquad \{\diamondsuit,\heartsuit\},\qquad \big\{0,\{0\},\{\{0\}\}\big\},\qquad \{\Lambda,0,*\},\qquad \{A,C,G,T\}$$

Exercice 3. (★★) Soit $E = \{0,1,\{0\},\{0,1\}\}$. Parmi les propositions suivantes, dites lesquelles sont vraies :

$$\{0\}\in E,\quad \{0\}\in\mathcal{P}(E),\quad \{\{1\}\}\subset E,\quad \{0,1\}\subset E,\quad \{\{0\},0\}\subset\mathcal{P}(E)$$

$$\{\{0\},\varnothing\}\in\mathcal{P}(E),\quad \{\{1,\{0,1\}\},\{0\},E\}\subset\mathcal{P}(E),\quad \{\{\{0,1\}\}\}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(E)).$$

Exercice 4. (★★) Soit E un ensemble. Montrer que, pour toutes parties A, B et D non vides de E, on a :

1) $\big(A\cup B = B\cap D\big) \Rightarrow \big(A\subset B\subset D\big)$.
2) $\big(\overline{A}\subset B\big) \Leftrightarrow \big(A\cup B = E\big)$.
3) $\left.\begin{array}{l} A\cup B = A\cup D \\ A\cap B = A\cap D\end{array}\right\} \Leftrightarrow B = D$.
4) $(A\cup B\cup D)\cap(A\cup B\cup\overline{D})\cap(A\cup D\cup\overline{B}) = A\cup(B\cap D)$.
5) $A\backslash B = \overline{B}\backslash\overline{A}$.
6) $A\backslash(B\cap D) = (A\backslash B)\cup(A\backslash D)$.
7) $\big((A\times B)\cup(B\times A) = D^2\big) \Leftrightarrow \big(A = B = D\big)$.

Exercice 5. (★★) Soit E un ensemble. Si A et B sont deux parties de E, on note $A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$ leur différence symétrique.

1) Déterminer $A\Delta A$ et $A\Delta\varnothing$.
2) Montrer que $A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$.
3) Montrer que $\overline{A\Delta B} = (A\cap B)\cup(\overline{A\cup B})$.
4) Soit D une partie de A. Montrer que $A\Delta B = A\Delta D$ si et seulement si $B = D$.

Exercice 6. (★★) Décrire géométriquement l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$. Montrer qu'il ne s'agit pas du produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

Exercice 7. (★★★) Expliciter

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[,\qquad \bigcap_{p=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{p},\frac{2p+1}{p}\right[\qquad \text{et}\qquad \bigcup_{k=1}^{+\infty}\left(\left[-k,-\frac{1}{k}\right[\cup\left]\frac{1}{k},k\right]\right).$$

Exercice 8. ($\star$) Rappelons que l'on note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Notons

- I_0 l'ensemble des suites réelles de terme initial nul.
- M l'ensemble des suites réelles majorées.
- B l'ensemble des suites réelles bornées.
- L l'ensemble des suites réelles convergentes.
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, L_k l'ensemble des suites réelles qui convergent vers un réel de $[k, k+1[$.
- C l'ensemble des suites réelles croissantes.
- G l'ensemble des suites géométriques.

1) Écrire ces ensembles en compréhension, ainsi que l'ensemble $\overline{L}$.
2) Montrer que $B \subsetneq M$, $L \subsetneq B$, $(C \cap M) \subsetneq L$.
3) Décrire $L \cap G$.
4) Montrer que la famille $(L_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une partition de L.

II Applications

Exercice 9. ($\star$ à $\star\star$) Dire si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives (auquel cas déterminer la bijection réciproque) :

1) $f : k \in \mathbb{N} \longmapsto 5k+1 \in \mathbb{N}^*$,
2) $g : x \in \mathbb{R}\backslash\{5\} \longmapsto \dfrac{3+2x}{x-5} \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$,
3) $h : y \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt{y^2+y+1} \in \mathbb{R}_+$,
4) $\varphi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{e^t-1}{e^t+1} \in \mathbb{R}$,
5) $\psi : (s,t) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (s+2t, 5t-3s) \in \mathbb{R}^2$,
6) $\Lambda : (u,v) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (6u-10v, -3u+5v) \in \mathbb{R}^2$,
7) $F : \begin{array}{ccc}]0,3] & \longrightarrow & [0,2[\\ z & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{4-z}{2} & \text{si} \quad z \in]0,2[, \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad z \in [2,3]. \end{array}\right. \end{array}$

Exercice 10. ($\star\star$) Montrer que les exemples suivants sont en bijection (on explicitera une telle bijection) :

1) $[0,1]$ et $[a,b]$ (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$),
2) $]0,1]$ et $[a,+\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}_+$),
3) $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers naturels pairs,
4) $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers naturels impairs,
5) $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$,
6) $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$,
7) $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
8) $\mathbb{Q}$ et une partie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Exercice 11. ($\star\star\star$) Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (j,k) & \longmapsto & 2^j(2k+1) \end{array}$ est une bijection. En déduire que $\mathbb{N}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Remarque : ce résultat combiné avec l'exercice précédent entraîne que $\mathbb{Q}$ est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Nous verrons au second semestre que l'on peut en déduire que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$ sont en bijection.

Exercice 12. ($\star\star$) On reprend les notations de l'exercice 8.

1) L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array}$ est-elle surjective ? injective ? bijective ?
2) L'application $\psi : \begin{array}{ccc} G \cap \overline{I}_0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$ est-elle surjective ? injective ? bijective ?

Exercice 13. ($\star\star\star$) Soient E, F et G trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ des applications. Considérons l'application $h : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \times G \\ x & \longmapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$.

1) Montrer que si f ou g sont injectives, alors h aussi. La réciproque est-elle vraie ?
2) Montrer que si h est surjective, alors f et g aussi. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 14. ($\star\star$) Soient E, F et G des ensembles. Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

1) Supposons que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective. Qu'en est-il de g ?
2) Supposons que $g \circ f$ est surjective. Montrer que g est surjective. Qu'en est-il de f ?

Feuille d'exercice n° 8

Combinatoire

Exercice 1. (★) En France, à tout véhicule est attribué un numéro d'immatriculation (SIV) formé de sept caractères alphanumériques : deux lettres, un tiret, trois chiffres, un tiret et deux lettres (par exemple "KZ-119-EP"). Les lettres interdites sont I, O et U (car elles sont trop ressemblantes avec 1, 0 et V respectivement). La série de chiffres 000 est interdite, ainsi que la série de lettres SS. Enfin la série WW est interdite pour le bloc de gauche (elle correspond aux immatriculations provisoires).

1) Combien y a-t-il d'immatriculations possibles ?
2) Combien y a-t-il d'immatriculations ne contenant aucune lettre ni chiffre dupliqué ?

Exercice 2. (★) Combien y a-t-il de mots utilisant l'alphabet latin (ayant un sens ou non) composés

1) de cinq lettres ?
2) de cinq lettres distinctes ?
3) de cinq lettres avec un y ?
4) de cinq lettres formant un palindrome ?
5) de cinq lettres distinctes et dans l'ordre alphabétique ?
6) de cinq lettres avec exactement 2 voyelles ?

Exercice 3. (★★) On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. On obtient ce qu'on appelle une main.

1) Combien y a-t-il de mains possibles ?
2) Combien y a-t-il de mains avec
   a) uniquement des figures ?
   b) deux piques, un cœur et deux carreaux ?
   c) exactement un trèfle ?
   d) au moins un valet ?
   e) au moins une dame et un 9 ?
   f) (★★★) exactement deux rois et deux cœurs ?

Exercice 4. (★★) On dispose d'une urne avec 4 boules bleues, 6 boules rouges et 7 boules jaunes. On suppose que les boules sont numérotées (de telle sorte que l'on puisse les distinguer). On tire 5 boules dans l'urne.

1) Quel est le nombre de tirages simultanés donnant 2 bleues, 2 rouges et 1 jaune ?
2) Quel est le nombre de tirages successifs et sans remise donnant 2 bleues, 2 rouges et 1 jaune ?
3) Quel est le nombre de tirages successifs et sans remise donnant 2 bleues, 2 rouges et 1 jaune dans cet ordre ?
4) Reprendre ces trois questions dans le cas où les boules sont indiscernables et ajouter le cas où les tirages se font avec remise.

Exercice 5. (★) Combien y a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) de chacun de ses mots : BOWIE, MAISON, POSSIBLE, ANAGRAMME, LEDZEPPELIN, MISSISSIPPI ?

Exercice 6 – Formule de Poincaré pour trois ensembles. (★★)

1) Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E fini. Montrer que $A \cup B \cup C$ est fini et que
$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B) + \mathrm{card}(C) - \mathrm{card}(B \cap C) - \mathrm{card}(A \cap B)\\ - \mathrm{card}(A \cap C) + \mathrm{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$
2) Quelques applications de cette formule (que l'on reverra dans le prochain chapitre).
   a) Dans un ciné-club, 45 membres ont vu au moins un des trois films de Hitchcock *Vertigo*, *Psycho* et *Rear Window*. On sait que 33 d'entre eux ont vu *Vertigo*, 30 ont vu *Psycho* et 19 ont vu *Rear Window*. On sait aussi que 22 ont vu à la fois *Vertigo* et *Psycho*, 13 ont vu à la fois *Psycho* et *Rear Window*, 8 ont vu à la fois *Vertigo* et *Rear Window*. Combien de membres ont vu les trois films ?
   b) Combien y a-t-il d'entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 120 et qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5, ni par 7 ?
   On introduira D_3 (resp. D_5, resp. D_7) l'ensemble des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 120 divisibles par 3 (resp. 5, resp. 7).

Exercice 7. (★★) Une étagère comporte 15 DVD distincts dont 6 films de science fiction, 7 thrillers et 2 biopics. Combien y a-t-il de façons de ranger cette étagère ? Qu'en est-il si on impose un rangement par genre ? Et si on souhaite seulement que les thrillers soient groupés ?

Exercice 8. (★★) Montrer (avec des arguments combinatoires) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall p \in [\![0, n]\!], \qquad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 9 – Formule de Vandermonde. (★★) Soient p et q deux entiers naturels.

1) En utilisant le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q}$, montrer que

$$\forall r \in [\![0, p+q]\!], \qquad \binom{p+q}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k}.$$

2) Donner une démonstration combinatoire de cette égalité.

Exercice 10. (★★) Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. Dénombrer

1) le nombre de façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes.
Indice : on peut coder une configuration où l'on a placé p pièces dans n poches par une succession de $\circ$ et de $|$ de la façon suivante : on place autant de $\circ$ que de pièces dans la première poche, puis on place un $|$, ensuite on place autant de $\circ$ que de pièces dans la deuxième poche, puis on place un $|$, etc. Par exemple, si on a 6 pièces et 4 poches, $\circ\circ\circ|\circ||\circ\circ$ code le fait qu'il y a 3 pièces dans la première poche, 1 pièce dans la deuxième, aucune dans la troisième et 2 dans la quatrième.
2) le nombre de façons de placer p pièces identiques dans n poches différentes de sorte qu'aucune ne soit vide.
3) le nombre de tirages successifs et avec remise de p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, sans prendre en compte l'ordre.
4) le nombre de n-uplets $(r_1, \dots, r_n)$ d'éléments de $[\![0, p]\!]$ tels que $r_1 + \cdots + r_n = p$.
5) (★★★) le nombre d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

Exercice 11 – Mains au poker fermé. (★★★) Dans un jeu de carte, toute carte possède une couleur (♣, ♠, ♢ ou ♡) et un rang (un numéro ou une figure). On tire cinq cartes d'un jeu de $4r$ cartes avec $r \in \mathbb{N}^*$ (si $r = 13$, il s'agit d'un jeu de 52 cartes et, si $r = 8$, il s'agit d'un jeu de 32 cartes[1]). On obtient ce qu'on appelle une main.

1) Calculer le nombre total de mains possibles.
2) Combien y a-t-il de mains possibles avec (dans l'ordre de leurs forces au poker fermé) :
   a) une **quinte flush** (cinq cartes de la même couleur et de rangs consécutifs) ?
   On introduira $s(r)$ le nombre de suites de rangs consécutifs possibles. On a $s(13) = 10$ et $r(8) = 4$.
   b) un **carré** (quatre cartes de même rang et une cinquième carte quelconque) ?
   c) un **full** (trois cartes de même rang et deux autres cartes de même rang) ?
   d) une **couleur** (cinq cartes de même couleur dont les rangs ne sont pas consécutifs) ?
   e) une **quinte** (cinq cartes de rangs consécutifs et qui ne sont pas toutes de la même couleur) ?
   f) un **brelan** (trois cartes de même rang et deux cartes de rangs distincts deux à deux et différents de celui des trois premières cartes) ?
   g) une **double paire** (deux cartes de même rang, deux autres cartes de même rang mais différent de celui des deux premières cartes et une cinquième carte de rang différent des deux précédents) ?
   h) une **paire** (deux cartes de même rang et trois autres de rangs distincts deux à deux et différent de celui la paire) ?
   i) une **carte haute** (cinq cartes n'étant pas toutes de la même couleur, de rangs distincts deux à deux et non consécutifs) ?

1. Pour obtenir un jeu de 32 cartes à partir d'un jeu de 52 cartes, on enlève toutes les cartes numérotées 2, 3, 4, 5 ou 6.

Feuille d'exercice n° 9

Probabilités sur un univers fini

I Calculs de probabilités

Dans les exercices suivants, on commencera par déterminer un univers Ω associé à l'expérience aléatoire. Avant de calculer une probabilité, on décrira au mieux les événements à l'aide d'opérations sur les ensembles.

Exercice 1. (★) On considère $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A, B, C et D des événements. En utilisant les opérations ensemblistes, décrire les événements suivants :

1) « L'un au moins des événements A, B, C, D est réalisé ».
2) « Tous les événements A, B, C, D sont réalisés ».
3) « Aucun des événements A, B, C, D n'est réalisé ».
4) « B et C ne sont pas réalisés ».
5) « L'un des événements B et D et un seul est réalisé ».
6) « Si A est réalisé, alors B et D sont réalisés ou C n'est pas réalisé ».
7) « Exactement deux événements parmi A, B, C, D sont réalisés ».

Exercice 2. (★) On jette un dé pipé dont les probabilités d'occurrence de $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sont respectivement

$$p_1 = \frac{1}{12}, \qquad p_2 = \frac{1}{6}, \qquad p_3 = \frac{1}{12}, \qquad p_4 = \frac{1}{6}, \qquad p_5 = \frac{1}{6}, \qquad p_6 = \frac{1}{3}.$$

1) Construire un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ fini qui modélise cette expérience aléatoire.
2) Décrire chacun des événements suivants comme des parties de Ω et calculer leurs probabilités :
   a) « Le chiffre est impair ».
   b) « Le chiffre est supérieur à 2 ».
   c) « Le chiffre est impair et inférieur à 4 ».
   d) « Le chiffre est impair ou inférieur à 4 ».

Exercice 3. (★) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\Omega = [\![1, n]\!]$. Soit $\mathbb{P}$ une fonction définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(\{k\}) = \alpha k \binom{n}{k}$. A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\mathbb{P}$ définit-elle une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$?

Exercice 4. (★) Une séquence d'ADN est une suite de quatre nucléotides dénotés A, C, G, T.

1) Si chaque nucléotide est équiprobable, quelle est la probabilité d'obtenir une séquence de longueur 13 contenant exactement cinq A ?
2) Quelle est la probabilité d'obtenir une séquence avec $A, A, A, G, G, G, G, G, T, T, T, T, C$?

Exercice 5 – Le problème du chevalier de Méré. (★★) En 1654, le chevalier de Méré, philosophe et homme de lettres posa le problème suivant au mathématicien Blaise Pascal : « Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un six en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double six en lançant vingt-quatre fois deux dés ? ». Étudier ce problème.

Exercice 6. (★) Une entreprise réceptionne périodiquement des lots de pièces destinées à des assemblages. Pour contrôler la qualité d'un lot de taille n, elle échantillonne r pièces ($r < n$). En supposant que le lot contienne k pièces défectueuses ($k \leqslant n$), quelle est la probabilité de trouver m pièces défectueuses dans l'échantillon examiné ($m \leqslant r$) ?

Exercice 7 – Probabilités des mains au poker fermé. (★)

1) Reprendre l'exercice 11 du TD n° 8 et calculer les probabilités de chaque type de main au poker fermé pour des jeux de 32 et 52 cartes. On présentera les résultats dans un tableau.
2) Vérifier que, pour un jeu de 52 cartes, alors l'ordre des probabilités des mains correspond à l'ordre de leurs forces (plus la probabilité est faible, plus la main est forte) mais que ce n'est pas le cas si le jeu ne contient que 32 cartes.

Exercice 8 – Le problème des anniversaires. (★★) On considère une classe de n élèves, avec $n < 365$. On suppose que tous les élèves sont nés une année de 365 jours et que les naissances sont réparties de façon équiprobables dans l'année.

1) Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants aient la même date d'anniversaire ?
2) A partir de quelle valeur de n cette probabilité est supérieure à 50% ? Supérieure à 75%.
3) Commenter l'hypothèse d'équirépartition des naissances dans l'année. Comment évoluerait la probabilité ci-dessus si l'on faisait une hypothèse plus réaliste (sans faire de calculs) ?
4) Combien de personnes doit-on interroger pour que la probabilité que l'une d'entre elles partage votre date d'anniversaire soit supérieure à 50% ?

Exercice 9 – Formule du crible. (★★★) Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. La formule du crible généralise la formule de Poincaré : si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset [\![1,n]\!] \\ \operatorname{card}(J)=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right).$$

1) Écrire cette formule pour $n = 4$.
2) En déduire une formule analogue pour $\operatorname{card}(F_1 \cup \cdots \cup F_n)$ où $F_1, \ldots, F_n$ sont des parties d'un ensemble fini E.
3) Application : Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. A l'approche des fêtes de Noël, les élèves de S1B ont décidé de s'offrir des cadeaux selon le protocole suivant : un sac opaque contient les noms de tous les élèves (écrits chacun sur un morceau de papier). Chacun leur tour, les élèves tirent un nom au hasard parmi les noms restants au moment du tirage. Chaque élève devra offrir un cadeau à l'élève dont il a tiré le nom [1]. On cherche à calculer la probabilité qu'aucun élève ne tire son nom.
   a) Déterminer un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience aléatoire. On donnera $\operatorname{card}(\Omega)$.
   b) Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, introduisons A_j l'événement « Le $j^{\text{ième}}$ élève tire son nom ». Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et J une partie de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k. Montrer que
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \frac{(n-k)!}{n!}.$$
   c) En déduire que la probabilité qu'aucun des élèves de la classe ne tire son nom est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
   Nous verrons au second semestre que cette probabilité tend vers $\frac{1}{e}$ lorsque n tend vers ∞.
4) *Pour les plus courageux :* montrer la formule du crible (par récurrence).

1. Ils peuvent aussi demander à leur professeur de participer à ce jeu... mais ça ne change rien à l'exercice.

II Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 10. (★★) Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilité fini.

1) Que dire sur deux événements A et B qui sont à la fois incompatibles et indépendants ?
2) Montrer que, si A est un événement presque sûr (i.e. $\mathbb{P}(A) = 1$) ou négligeable (i.e. $\mathbb{P}(A) = 0$), alors A est indépendant de tout événement dans $\mathcal{P}(\Omega)$.
En particulier un événement presque sûr ou négligeable est indépendant de lui même.

Exercice 11. (★★) On dispose de 12 pièces numérotées de 1 à 12 et on suppose que, pour tout $k \in [\![1, 12]\!]$, la $k^{\text{ième}}$ pièce tombe sur FACE avec probabilité $\dfrac{k}{12}$. On lance une pièce au hasard et on obtient PILE. Quelle est la probabilité d'avoir lancé la sixième pièce ?

Exercice 12. (★★) On dispose de deux urnes U et V. L'urne U contient 3 boules rouges, 7 boules bleues et 2 boules jaunes. L'urne V contient 2 boules rouges, 5 boules bleues et 1 boule jaune. On considère l'expérience suivante : on tire au hasard une boule de l'urne U et, sans la regarder, on la place dans l'urne V. On tire alors une boule dans V et on regarde sa couleur.

1) a) Calculer les probabilités respectives de piocher une boule rouge, bleue et jaune.
   b) On a tiré une boule bleue dans l'urne V. Quelle est la probabilité d'avoir pioché aussi une boule bleue dans l'urne U ?
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On réalise n fois cette expérience dans les mêmes conditions et indépendamment. Quelle est la probabilité que l'on ait tiré une boule rouge dans l'urne V pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ tirage ?

Exercice 13. (★) On dispose d'un circuit composé de de trois composants électroniques A, B et C dont les probabilités de fonctionnement sont respectivement α, β et γ. On suppose les composants sont en état de fonctionnement indépendamment les uns des autres. Quel est la probabilité que le circuit fonctionne :

- lorsque les composants sont montés en série.
- lorsque les composants sont montés en parallèle.
- lorsque A est monté en série avec le sous-circuit constitué de B et C montés en parallèle.

Exercice 14. (★★) Les téléviseurs d'un magasin d'électroménager proviennent de deux fournisseurs A et B. Une enquête révèle que 95% (respectivement 99%) des téléviseurs fournies par la société A (respectivement la société B) sont en état de fonctionnement. Elle révèle que un téléviseur sur 48 est abimé lors de la livraison au client. Enfin on sait que la société A fournit 3 fois plus de téléviseurs que la société B. Monsieur Durand vient de se faire livrer un téléviseur défectueux provenant de ce magasin. Quelle est la probabilité que le téléviseur ait été abimé lors de la livraison ? Quelle est la probabilité que le téléviseur ait été fourni déjà défectueux par la société A ?

Exercice 15. (★) Catherine a un garçon atteint de dystrophie musculaire de Duchenne (DMD). Il s'agit d'une maladie due à une mutation récessive liée au sexe, et entraînant un déficit complet de la production de dystrophine. Seuls les hommes porteurs de cette mutation sont atteints, tandis que les femmes sont conductrices. Les femmes conductrices ont un risque de 50% de transmettre l'allèle muté à leur descendance : les fils d'une femme conductrice ont 50% de risque d'être atteints et les filles d'une femme conductrice ont 50 % de risque d'être conductrices. Cependant, le taux de mutation spontanée est élevé : 1/3 des cas de DMD surviennent chez des garçons de mères non porteuses de la mutation. Il existe un test clinique qui est positif avec probabilité 0.7 si une femme est conductrice et positif avec probabilité 0.1 si elle ne l'est pas. Le test de Catherine est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit conductrice ?

Exercice 16 – Le problème de Monty Hall. (★★) Il s'agit d'un casse-tête probabiliste librement inspiré du jeu télévisé américain *Let's Make a Deal*, présenté pendant treize ans par Monty Hall. Voici son énoncé : un candidat est placé devant trois portes. Derrière une des portes se trouve une voiture, derrière les deux autres se trouve une chèvre. Le candidat choisit une des trois portes sans l'ouvrir. L'animateur (qui sait où se trouve la voiture) ouvre l'une des portes restantes derrière laquelle se trouve une chèvre. Le candidat a alors le choix entre conserver la porte initiale ou changer pour prendre la porte fermée restante. Quel choix doit-il faire ?

Exercice 17. (★★) On dispose d'un sac opaque de billes dont 9 rouges, 5 vertes et 7 bleues. On pioche cinq billes au hasard successivement et sans remise. Calculer la probabilité de piocher

1) uniquement des billes d'une même couleur.
2) uniquement des billes bleues sachant que toutes les billes sont de la même couleur.
3) trois boules d'une couleur et deux d'une autre couleur.
4) au moins une bille de chaque couleur.
5) trois billes rouges sachant que les trois couleurs sont piochées.

Reprendre cet exercice avec des tirages avec remise.

Exercice 18. (★★) Un fumeur veut arrêter de fumer. S'il réussit à ne pas fumer un jour, alors il reste motivé le lendemain et il a 3 chances sur 4 de ne pas fumer. Par contre, s'il fume un jour, alors le lendemain il fume avec probabilité $\alpha \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'il fume le $n^{\text{ième}}$ jour. On suppose que $p_0 = 1$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et α.
2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de p_n en fonction de n, α et p_0.
3) Déterminer la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle existe. Cette limite éventuelle peut-elle être nulle ? Dans le cas où la limite existe et n'est pas nulle, donnez-en en une borne inférieure. Cette stratégie vous semble-t-elle judicieuse pour arrêter de fumer ?

Exercice 19. (★★) Une mouche entre dans un studio de deux pièces (une chambre et une salle de bain). Elle se trouve initialement dans la salle de bain. On relève sa position dans le studio toutes les minutes.

- Si elle est dans la salle de bain à la $n^{\text{ième}}$ minute, elle y reste avec probabilité $1/3$ ou elle va dans la chambre avec probabilité $2/3$.
- Si elle est dans la chambre à la $n^{\text{ième}}$ minute, elle y reste avec probabilité $1/2$, elle va dans la salle de bain avec probabilité $1/4$ ou elle sort part la fenêtre avec probabilité $1/4$ pour ne plus jamais revenir.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons a_n (respectivement b_n et c_n) les probabilités respectives que la mouche soit dehors (respectivement dans la salle de bain et dans la chambre).

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de b_n et c_n.
2) Étudier les suites $(2b_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(4b_n + 3c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de a_n, c_n et b_n en fonction de n.
4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que la mouche est dans la salle de bain à la $n^{\text{ième}}$ minute, quelle est la probabilité qu'elle était déjà dans la salle de bain la minute précédente ?
5) Combien de minutes sont-elles nécessaires pour que la probabilité que la mouche soit dehors soit supérieure à 95% ?

Feuille d'exercice n° 10

Variables aléatoires réelles finies

Exercice 1. (★) On joue au jeu suivant : on lance deux dés équilibrés à 6 faces. Si aucune des faces ne vaut 6, alors on gagne le produit des deux chiffres obtenus en euros. Si une au moins des faces vaut 6, alors on ne gagne rien. Donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui modélise ce jeu et définir une variable aléatoire X qui donne le gain de ce jeu. Donner la loi de X sous la forme d'un tableau. Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(1 \leqslant X \leqslant 5), \qquad \mathbb{P}(21 \leqslant X < 25), \qquad \mathbb{P}(X > 18) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \in \{10, 12, 14\}).$$

Tracer la fonction de répartition de X.

Exercice 2. (★) Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Soit X la variable aléatoire finie à valeurs dans $[\![1, ab]\!]$ vérifiant

$$\forall k \in [\![1, ab]\!], \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que X soit bien une variable aléatoire réelle finie ? Calculer $\mathbb{E}(X)$ et déterminer a et b afin que $\mathbb{E}(X) = 3,5$.

Exercice 3. (★) Soit X une variable aléatoire réelle de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Déterminer de deux façons différentes la loi de $Y = n - X$.

Exercice 4. (★) Un chercheur de l'université Paris-Sud se rend deux à trois fois par semaine à Paris (20 trajets sur le mois) avec le RER B. D'après des statistiques, un train sur trois accuse un retard. Quelle est la probabilité que ce francilien arrive en retard au plus cinq fois en un mois ?

Exercice 5. (★) Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, \ldots, n, \ldots$ de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Au départ, la puce se situe sur la case 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n et Y_n les variables aléatoires représentant respectivement le numéro de la case où se trouve la puce après n sauts et le nombre de sauts d'une case effectués au cours des n premiers sauts.

1) Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2) Exprimer X_n en fonction de Y_n. En déduire la loi de X_n.
3) Calculer l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 6. (★) Pour animer une soirée, on a le choix entre deux groupes de rock : l'un composé de quatre musiciens et l'autre de six musiciens. La probabilité qu'un musicien soit indisponible est $p \in]0, 1[$, indépendamment des autres musiciens. Un groupe ne peut se produire que si la moitié au moins de ses musiciens est disponible. Quel groupe choisir ?

Exercice 7. (★) Une urne U_1 contient 6 boules bleues et 5 rouges. Une urne U_2 contient 4 boules bleues et 8 boules rouges. On tire au hasard simultanément deux boules dans l'urne U_2 que l'on transfère dans l'urne U_1. Ensuite on tire une boule au hasard dans l'urne U_1 et on relève sa couleur.

1) Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de boules bleues transférées. Déterminer la loi de X.
2) Calculer la probabilité que la boule tirée dans l'urne U_1 soit bleue.
3) Calculer la probabilité que l'une au moins des boules transférées soit bleue sachant que la boule tirée est bleue.

Exercice 8 – Loi des tirages avec ou sans remise. (★★) Soient n, r et N dans $\mathbb{N}^*$ avec $r < N$ et $n \leqslant N$. Une urne contient N boules dont r rouges et $b = N - r$ bleues. On pose $p = \dfrac{r}{N}$.

1) On tire successivement avec remise n boules dans l'urne et on note R le nombre de boules rouges obtenues. Montrer que R suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   On dit que la loi binomiale est la loi des tirages avec remise.
2) Désormais on tire successivement sans remise n boules dans l'urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues.
   a) Donner un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience et déterminer $X(\Omega)$.
   b) Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = k) = \dbinom{pN}{k}\dbinom{(1-p)N}{n-k}\Big/\dbinom{N}{n}$.

      On dit que X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p. On la note $\mathcal{H}(N, n, p)$. On dit aussi que la loi hypergéométrique est la loi des tirages sans remise.
   c) Retrouver la formule de Vandermonde : si a, b, n sont des entiers naturels tels que $0 \leqslant n \leqslant a + b$, alors
   $$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$
   d) (★★★) En utilisant la formule de Vandermonde, montrer que $\mathbb{E}(X) = np$.

Exercice 9. (★★) Soient n et k deux entiers naturels tels que $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k < n$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

1) On tire successivement et sans remise k boules de l'urne et on note X le plus grand des numéros tirés. Donner un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience et définir proprement la variable aléatoire X comme fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. Déterminer la loi de X.

   Indication : on pourra s'aider de la fonction de répartition de X.
2) Même question avec des tirages successifs avec remise de k boules.
3) a) Même question avec un tirage simultané de k boules.
   b) Retrouver la formule de Pascal généralisée : $\displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{j-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

Exercice 10. (★) Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k).$$

Exercice 11. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois de suite un dé bien équilibré à 6 faces. On note X_n le plus grand des numéros tirés. Déterminer la fonction de répartition de X_n. En déduire la loi de X_n et son espérance.

Exercice 12. (★★) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ telle que
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{c}{k+1}\binom{n}{k}.$$
Déterminer c puis calculer $\mathbb{E}(X+1)$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X(X+1))$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 13. (★★) Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0, 1[$.

1) Montrer que $Y = \dfrac{1}{1+X}$ est une variable aléatoire réelle finie et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
2) Soit $z \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $Z = z^X$ est une variable aléatoire réelle finie et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 14. (★★★) Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Les résultats de X sont affichés par un compteur détraqué :

- le compteur affiche la valeur correcte de X lorsque X prend une valeur comprise entre 1 et $n-1$.
- le compteur affiche un nombre tiré uniformément entre entre 1 et $n-1$ lorsque $X = 0$ ou n.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre affiché sur le compteur.

1) Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.
2) Quelle est la probabilité que le compteur Y affiche la valeur prise par X ?
3) On suppose que n est pair. Sachant que le compteur affiche la valeur $n/2$, quelle est la probabilité que $X = n/2$?

Exercice 15. (★★★) Un gardien doit ouvrir une porte dans le noir à l'aide d'un trousseau de dix clés dont une seule convient. Deux méthodes s'offrent à lui :

- Méthode A (lorsqu'il est sobre) : il essaie les clés l'une après l'autre.
- Méthode B (lorsqu'il est ivre) : il essaie une clé, agite le trousseau, puis recommence au plus dix fois. S'il n'a pas ouvert la porte, alors il retourne se coucher.

On note X_A (resp. X_B) le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte avec la méthode A (resp. la méthode B). On pose $X_B = 11$ s'il n'arrive pas à ouvrir la porte après dix essais.

1) Déterminer la loi de X_A et calculer $\mathbb{P}(X_A > 8)$ et $\mathbb{E}(X_A)$.
2) Déterminer la loi de X_B et calculer $\mathbb{P}(X_B > 8)$.
3) Un cambrioleur caché à l'intérieur sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Le gardien a déjà échoué huit fois à ouvrir la porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

Exercice 16 – Urnes de Pòlya (extrait du concours blanc nº 1 de l'année dernière). (★★★)
Soient r_0, b_0 et d des entiers strictement positifs. Une urne contient b_0 boules bleues et n_0 boules rouges. Une boule est choisie au hasard uniformément dans l'urne. On note sa couleur et on la remet dans l'urne en ajoutant un nombre d de boules supplémentaires de la même couleur. Puis on recommence la procédure aussi souvent que nécessaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale à 1 (resp. 0) si la $k^{\text{ième}}$ boule tirée est rouge (resp. bleue).

1) a) Donner la loi de X_1.
   b) Déterminer la loi de X_2.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons S_n le nombre de boules rouges tirées lors des n premiers tirages.
   a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\mathbb{P}_{[S_n = k]}(X_{n+1} = 1)$.
   b) En déduire que $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{r_0 + d\,\mathbb{E}(S_n)}{r_0 + b_0 + d\,n}$.
   c) Exprimer $\mathbb{E}(S_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{E}(S_n)$ et de $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$.
3) En déduire que la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Commenter ce résultat.

Exercice 17. (★★★) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on obtient un numéro supérieur ou égal au numéro précédent. On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1) Justifier que Y_n est une variable aléatoire réelle finie qui prend ses valeurs dans $[\![2, n+1]\!]$.
2) Déterminer $\mathbb{P}(Y_n > k)$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$.
3) En déduire que, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}(Y_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.
4) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.

Feuille d'exercice n° 11

Limite et continuité en un point

I Calcul de limites

Exercice 1. (★ à ★★) Étudier les (éventuelles) limites suivantes. On distinguera éventuellement les limites à gauche et à droite.

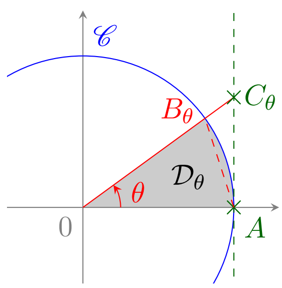
1) $x \mapsto \dfrac{2}{4x-3x^2-1}$ en 1.
2) $x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ en 0.
3) $x \mapsto \sqrt{7-x}-\sqrt{3-x}$ en 0 et en $-\infty$.
4) $x \mapsto \dfrac{3x-\sqrt{x}}{x+2\ln(x)}$ en $+\infty$.
5) $x \mapsto 2x^4+x-5+\dfrac{\sqrt{4x^2-8x+4}}{x-1}$ en 1.
6) $x \mapsto x^3 e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$.
7) $x \mapsto x^x$ en 0^+.
8) $x \mapsto \dfrac{3-5x}{x^2\ln(x)}$ en 0^+ et en $+\infty$.
9) $x \mapsto x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.
10) $x \mapsto \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$.
11) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{3}-2\cos(x)}{1-2\sin(x)}$ en $\dfrac{\pi}{6}$.
12) $x \mapsto \dfrac{7\sin(x)-\sin(5x)}{\sin(6x)}$ en 0.
13) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin(x)}$ en 0.
14) $x \mapsto \ln(x)\ln(\ln(x))$ en 1^+.
15) $x \mapsto \ln(\sin(x))-\ln(x)$ en 0^+.
16) $x \mapsto \sin(\ln(x))$ en $+\infty$.
17) $x \mapsto \dfrac{3\sin(x)-4\sin^3(x)}{\sin(3x)}$ en 0.
18) $x \mapsto x^\alpha \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ en 0^+, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 2. (★ à ★★) Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.
2) $x \mapsto \ln(e^x+e^{-x})$.
3) $x \mapsto \dfrac{x^3-4x^2+5x+1}{9-4x^2}$.
4) $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{2+3x}{x-5}}$.
5) $x \mapsto x+\sqrt{x+1}\ln(x+1)$.
6) $x \mapsto \sqrt{\dfrac{(x-1)^3}{x+1}}$.

Exercice 3. (★) Notons $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé et $\mathcal{D}$ le disque (d'aire π) dont il est la frontière. Soit A le point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(1,0)$. Fixons $\theta \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et notons

- B_θ le point du cercle $\mathscr{C}$ tel que l'angle $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB_\theta})=\theta$.
- C_θ le point d'intersection de la droite $(0B_\theta)$ avec la droite d'équation $x=1$.
- $\mathcal{D}_\theta$ le secteur angulaire délimité par $\mathscr{C}$ et par les deux rayons $[OA]$ et $[OB_\theta]$.



1) Sachant que l'aire de $\mathcal{D}_\theta$ est proportionnelle à l'angle θ, calculer son aire.
2) Calculer l'aire des triangles AOB_θ et AOC_θ.
3) En remarquant que $AOB_\theta \subset \mathcal{D}_\theta \subset AOC_\theta$, en déduire que $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}=1$.

Exercice 4. (★★★) Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est périodique et qui admet une limite finie en $+\infty$?

II Continuité en un point

Exercice 5. (★) Montrer que la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x-\lfloor x \rfloor}$ est continue en tout point.

Exercice 6. (★) Prolonger par continuité les fonctions (lorsque c'est possible) aux bornes finies de leurs ensembles de définition :

$$f : x \mapsto \frac{x^2+4x-5}{2\sqrt{x+5}}, \qquad g : x \mapsto 1 - \frac{x}{|x|}, \qquad h : x \mapsto \cos\left(\frac{\pi x}{2|x|}\right), \qquad k : x \mapsto x - \ln(x-1).$$

Exercice 7. (★★) Les fonctions suivantes sont-elles continues en tout point de $\mathbb{R}$? Si non, préciser les points de discontinuité.

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \ln(\sqrt{x}-1) - \ln(x-1) & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \end{cases}, \qquad g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+e^{-1/x}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases},$$

$$h : x \longmapsto \begin{cases} \sin(x)\ln(-x) & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^{-3/2}(1-\cos(2x)) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Exercice 8. (★★) Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et continues en $x_0 \in I$. Nous définissons les fonctions $\phi = \min(f,g)$ et $\psi = \max(f,g)$ sur I par

$$\forall x \in I, \qquad \phi(x) = \min(f(x), g(x)) \qquad \text{et} \qquad \psi(x) = \max(f(x), g(x)).$$

Montrer que $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont continues en x_0.

On pourra écrire au préalable $\max(x,y)$ *et* $\min(x,y)$*, pour* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, en termes d'opérations élémentaires et de valeurs absolues.*

Exercice 9. (★★★) La fonction de Dirichlet est la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$

1) Montrer que f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
   On pourra utiliser le fait que, pour tout réel x_0*, il existe une suite de rationnels qui converge vers* x_0*.*
2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{p \to +\infty} \left(\lim\limits_{n \to +\infty} \cos^{2n}(p!x\pi) \right)$.
3) Étudier la continuité de la fonction $\varphi : x \in \mathbb{R} \longmapsto xf(x)$.

III Équations fonctionnelles

Exercice 10. (★★) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 1 et vérifiant, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x-1)$. Soit y un réel quelconque. On définit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $y_0 = y$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = \dfrac{1+y_n}{2}$.

1) Montrer que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) = f(y)$.
3) Caractériser la fonction f.

Exercice 11. (★★★) Notons $\mathcal{A} = \{g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R},\ g(x^2) = g(x)\}$.

1) Donner un exemple de fonction non constante appartenant à $\mathcal{A}$.
2) Soit f une fonction de $\mathcal{A}$ qui est continue en 0 et en 1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x^{1/2^n})$. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. (★★★) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 et vérifiant, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1) Montrer que $f(0) = 0$ et que f est impaire.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$. Étendre ce résultat à $n \in \mathbb{Z}$.
3) Soit $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Montrer que $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q}f(1)$.
4) Montrer que f est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
5) Caractériser la fonction f (*on utilisera le fait que tout réel est limite d'une suite de rationnels*).

Feuille d'exercice n° 12

Étude globale de fonctions

I Continuité sur un intervalle

Exercice 1. (★) Que dire d'une fonction f continue vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\big(f(x)\big)^2 = f(x)$.

Exercice 2. (★) Un marathonien a parcouru une distance de 24km en deux heures. Montrer qu'il a parcouru exactement 12km durant un intervalle de temps d'une heure.
On étudiera $g : t \longmapsto f(t+1) - f(t)$ *où* $f : [0,2] \longrightarrow [0,24]$ *désigne la fonction telle que, pour tout* $t \in [0,2]$, $f(t)$ *est la distance déjà parcourue à l'instant* t. *On supposera que* f *est continue.*

Exercice 3. (★) Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet exactement trois solutions réelles distinctes. A l'aide d'un raisonnement par dichotomie, déterminer des encadrement de longueur au plus 10^{-1} de ces trois solutions (on pourra utiliser Scilab).

Exercice 4. (★) Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) < g(x)$. Montrer que $f \leqslant g$ sur tout $\mathbb{R}$. A-t-on $f < g$?

Exercice 5. (★) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Montrer que toute application continue $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ admet un point fixe.

Exercice 6. (★★) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$. L'objectif de cet exercice est de montrer que f admet un unique point fixe, *i.e.* il existe un unique réel y tel que $f(y) = y$.

1) On pose $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) - x$. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
2) En déduire que f admet un point fixe et qu'il est nécessairement unique.
3) Est-ce que ce résultat est vrai si f est une fonction croissante ?

Exercice 7. (★★) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Supposons que f admette des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. (★★) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue et strictement positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > m$.

Exercice 9 – D'après l'oral de l'ESCP. (★★★) Soit $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, considérons la fonction $g_u : x \in [-1,1] \longrightarrow ux - f(x)$.

1) Soit $u \in \mathbb{R}$. Montrer que g_u admet un maximum $M(u)$. On note E_u l'ensemble des réels de $[-1,1]$ en lesquels g_u atteint son maximum.
2) Soient $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ et soient $x \in E_u$ et $y \in E_v$. Montrer que $M(u) - M(v) \leqslant (u-v)x$ et que $M(v) - M(u) \leqslant (v-u)y$. En déduire que $|M(v) - M(u)| \leqslant |u - v|$.
3) Montrer que la fonction $M : u \in \mathbb{R} \longmapsto M(u)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

II Théorème de la bijection et fonction Arctangente

Exercice 10. (★) Dans les cas suivants, montrer que f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J (que l'on précisera) et expliciter f^{-1} sur J.

$$1)\ f : x \mapsto \sqrt{1 + 3(\ln(x))^2}, \qquad 2)\ f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}, \qquad 3)\ f : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Exercice 11. (★)

1) Montrer que la fonction cosinus réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur un intervalle à préciser. On note Arccos sa bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de Arccos et tracer sa courbe représentative.
2) Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2,\pi/2]$ sur un intervalle à préciser. On note Arcsin sa bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de Arcsin et tracer sa courbe représentative.
3) Donner les valeurs de $\sin(\mathrm{Arccos}(x))$ et $\cos(\mathrm{Arcsin}(x))$ pour tout $x\in[-1,1]$.

Exercice 12. (★★) Calculer $\mathrm{Arctan}(\tan(x))$, $\tan(\mathrm{Arctan}(x))$, $\cos(\mathrm{Arctan}(x))$ et $\sin(\mathrm{Arctan}(x))$ pour tout réel x (lorsque cela a un sens).

Exercice 13 – Formule de Machin. (★★) Montrer que $\dfrac{\pi}{4}=4\,\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right)-\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{239}\right)$.

Exercice 14. (★★) Soient $f: x\longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$ et $g: x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\longmapsto \tan(x)$

1) Préciser l'ensemble de définition D_f de f. Prolonger f aux éventuelles bornes finies de D_f afin qu'elle soit continue à gauche (si c'est possible).
2) Expliciter l'application $f\circ g$. En déduire $f(x)$ en fonction de $\mathrm{Arctan}(x)$ pour tout $x\in D_f$.
3) Représenter graphiquement l'application f dans un repère orthonormé.

Exercice 15. (★★) Soit $f: x\in\mathbb{R}_+^*\longmapsto x\ln(x)$.

1) Montrer que, pour tout $t>0$, il existe un unique réel $g(t)>1$ tel que $f(g(t))=\dfrac{1}{t}$.
2) Montrer g ainsi définie est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16. (★★★) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique réel x_n strictement positif tel que $1+\sqrt{x_n}\ln(x_n)=n$. Déterminer le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et étudier sa limite.

III Autres propriétés globales

Exercice 17. (★★) Soient f et g deux fonctions bornées sur un intervalle I. Montrer que $f+g$ est bornée sur I et que $\sup_I|f+g|\leqslant\sup_I|f|+\sup_I|g|$. Montrer qu'il n'y a pas égalité en général.

Exercice 18. (★★) Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ telle que $f(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Montrer que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Donner un contre-exemple lorsque f n'est pas croissante.

Exercice 19. (★★★) Soit f une fonction croissante sur $[0,1]$ et à valeurs dans $[0,1]$. On souhaite montrer que f admet un point fixe

1) Montrer que $A=\{x\in[0,1]\,|\,f(x)\geqslant x\}$ possède une borne supérieure a vérifiant $f(a)\geqslant a$.
2) Montrer que $f(a)\in A$ et conclure.
3) Qu'en est-il si f est décroissante ?

Exercice 20. (★★) Soient $k\in\mathbb{R}_+^*$ et I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Soit $f: I\longrightarrow\mathbb{R}$ une application k-Lipschitzienne, c'est-à-dire telle que

$$\forall(x,y)\in I^2,\qquad |f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|.$$

1) Montrer que f est continue sur I.
2) Supposons que $k\in\,]0,1[$, que I est un segment et que $f(I)\subset I$. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0\in I$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=f(x_n)$.
   a) Montrer que f admet un unique point fixe $\ell\in I$.
   b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|x_n-\ell|\leqslant k^n|x_0-\ell|$.
   c) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
   d) Déterminer une valeur de n pour laquelle x_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Feuille d'exercice n° 13

Dérivation

I Dérivabilité et utilisation de la dérivée

Exercice 1. (★ à ★★) Donner le domaine de définition des fonctions suivants (et les prolonger éventuellement par continuité). Préciser ensuite les intervalles où elles sont dérivables et calculer leurs dérivées (préciser s'il y a des dérivées à gauche ou à droite).

1) $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$,

2) $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $(a,b,d,c) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*$,

3) $x \mapsto \dfrac{-1}{(4x^2-1)^2}$,

4) $x \mapsto \sqrt{x^3-x^2}$,

5) $x \mapsto x^x$,

6) $x \mapsto x\ln(x) - x$,

7) $x \mapsto (x^5+3x^3+2)^8$,

8) $x \mapsto \ln\left(1+\cos(\pi x^2)\right)$,

9) $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{-1+\sqrt{x^4+1}}{2}}$,

10) $x \mapsto \dfrac{4x^3+x^2-3}{2x^2-5x+2}$,

11) $x \mapsto \ln(x^4-3x^2+2)$,

12) $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{(\sin(x)+2)^4}$,

13) $x \mapsto e^{\cos^2(x)}$,

14) $x \mapsto (1+x^2)e^{\mathrm{Arctan}(x)}$,

15) $x \mapsto \ln(\ln(\ln(x)))$,

16) $x \mapsto \sqrt[6]{\tan(x)}$,

17) $x \mapsto 1-\cos(\sqrt{|x-2|})$,

18) $x \mapsto (\sin(x))^{x^2}$,

Exercice 2. (★) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Que dire sur f' lorsque f est paire, impaire ou périodique ?

Exercice 3. (★★) Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur leur intervalle de définition. Sont-elles de classes C^1 ?

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \sin(\sqrt{|x|}) - \sqrt{|x|},$$

$$g : x \in \left]-1,1\right[\longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(|x|)}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \qquad h : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

On pourra évaluer la fonction g en les points $\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)^{-1}$ et $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. (★) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I non vide et non réduit à un point. Soit $x_0 \in I$ n'étant pas une extrémité de I. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Calculer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0)}{h} \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+\alpha h) - f(x_0+\beta h)}{h}.$$

Exercice 5. (★★★)

1) Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$ et à valeurs réelles telle que $f(0)=0$.
   a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence de $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,\delta]$, $|f(x) - xf'(0)| \leqslant \varepsilon x$.
   b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{f'(0)}{2}$.
2) En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right), \qquad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{k+n^2}{2n^2-k}, \qquad \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

II Dérivabilité d'applications réciproques

Exercice 6. (★★) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 1$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. (★) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, simplifier $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2x^2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

Exercice 8. (★) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{1+x+x^2}\right) = \operatorname{Arctan}(1+x) - \operatorname{Arctan}(x)$. En déduire

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right).$$

Exercice 9. (★) Dans l'exercice 11 de la feuille d'exercices 13, nous avons introduit les fonctions Arccos et Arcsin (les bijections de $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ et $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ respectivement). Étudier la dérivabilité de ces fonctions sur $[-1, 1]$ et calculer leurs dérivées.

Exercice 10. (★★) Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser. Étudier la dérivabilité de f^{-1} et exprimer sa dérivée.

Exercice 11. (★★★) Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x)f(y) \neq -1 \qquad \text{et} \qquad f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}. \qquad (*)$$

1) Déterminer toutes les fonctions constantes f vérifiant $(*)$.
2) Montrer qu'une fonction vérifiant $(*)$ et prenant la valeur 1 ou la valeur -1 en un certain point est constante.

On suppose dans la suite de l'exercice que f est une fonction dérivable non constante qui vérifie $(*)$.

3) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < 1$ puis calculer $f(0)$.
4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $c = f'(0)$. En déduire que $c \neq 0$.
5) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et que f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$.
6) Calculer les dérivées des fonctions f^{-1} et $g : y \in]-1, 1[\longmapsto \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.
7) En déduire, pour tout $y \in]-1, 1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ en fonction de y et c.
8) Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles vérifiant $(*)$.

III Théorème de Rolle, égalité et inégalité des accroissements finis

Exercice 12. (★) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Exercice 13. (★) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left((x+1)e^{1/(x+1)} - xe^{1/x}\right)$.

Exercice 14. (★★) Une fonction est dite Lipschitzienne sur I si elle est k-Lipschitzienne sur I pour un certain $k \in \mathbb{R}_+^*$ (cf. exercice 19 de la feuille d'exercices 12).

1) Existe-il des fonctions Lipschitzienne qui ne sont pas dérivables ?
2) Soit f une fonction dérivable et Lipschitzienne sur I. Montrer que f' est bornée.
3) Montrer que, si f est dérivable sur I et si f' est bornée sur I, alors f est Lipschitzienne sur I.

Exercice 15. (★★) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction dérivable sur un $[a, b]$ qui s'annule en exactement n points de $[a, b]$. Montrer que f s'annule en au moins $n-1$ points de $]a, b[$.

Exercice 16. ($\bigstar$) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Supposons que $f(0) = 0$ et que f' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant f'(x)$.
2) En déduire les variations de la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 17 – Théorème des accroissements finis généralisés et règle de L'Hôpital. ($\bigstar\bigstar$)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Supposons que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

1) Montrer que $g(x) \neq g(a)$ pour tout $x \in]a, b[$.
2) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.
   On appliquera le théorème de Rolle à la fonction $x \longmapsto f(x) - \alpha g(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ bien choisi.
3) Règle de L'Hôpital : on suppose que la fonction $x \longmapsto \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ admet une limite finie ℓ à droite en a. Montrer que
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell.$$
4) Application : montrer que
$$\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1, \qquad \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{x - \sin(x)}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

Exercice 18. ($\bigstar\bigstar$) Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto 4 - \dfrac{1}{4}\ln(x)$.

1) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et les limites de f en 0 et $+\infty$.
2) Montrer qu'il existe un unique réel $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(\ell) = \ell$. Vérifier que $\ell \in I =]3, 4[$.
3) Montrer que $f(I) \subset I$ et que f' est bornée sur I par $\dfrac{1}{12}$.
4) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $y_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = f(y_n)$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in I$.
   b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|y_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{12}|y_n - \ell|$.
   c) En déduire que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 19. ($\bigstar\bigstar\bigstar$) Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-x}\ln(1 + e^x)$.

1) Étudier les limite de f en $\pm\infty$.
2) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}g(e^x)$. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. Vérifier que $\ell \in]0, 1[$.
4) Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ par $\ln(2)$.
5) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = e^{-x_n}\ln(1 + e^{x_n})$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
6) Écrire un programme en `Scilab` qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Exercice 20. ($\bigstar\bigstar$) Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1 - \sin(x)$.

1) Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative sur $[0, 2\pi]$.
2) Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - \sin(u_n)$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \geqslant 3$, $c \leqslant u_n \leqslant 1$.
3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Feuille d'exercice n° 14

Intégration d'une fonction sur un segment

I Calcul de primitives et d'intégrales

Exercice 1. (★) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{1-4v}\,dv$,
2) $\displaystyle\int_{\ln(4)}^{\ln(2)} (3e^{-\frac{x}{4}}+1)^2\,dx$,
3) $\displaystyle\int_1^2 e^u\left(\frac{1}{u}+\ln(u)\right)du$,
4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{5}{\cos^2(3z)}\,dz$,
5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \big(\cos^5(y)+4\cos^3(y)-7\big)\sin(y)\,dy$.
6) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{5+3t^2}\,dt$.

Exercice 2. (★) Donner une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser :

1) $x\mapsto \dfrac{2x^4}{3}-\dfrac{x}{5}+1$,
2) $x\mapsto \dfrac{x}{1+x}$,
3) $x\mapsto 1-\sin(\pi-2x)$,
4) $x\mapsto \dfrac{\ln(x)}{2x}$,
5) $x\mapsto \dfrac{1+x}{(5+2x+x^2)^{2017}}$,
6) $x\mapsto \exp(x+e^x)$,
7) $x\mapsto \dfrac{1}{x(1+\ln^2(x))}$,
8) $x\mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$,
9) $x\mapsto 2^x$.

Exercice 3. (★) Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. A l'aide de formules de trigonométrie, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1) $t\mapsto\cos(\alpha t)\cos(\beta t)$, 2) $t\mapsto\cos(\alpha t)\sin(\beta t)$, 3) $t\mapsto\sin(\alpha t)\sin(\beta t)$, 4) $t\mapsto\sin^4(t)$.

Exercice 4 – Primitives et décomposition en éléments simples. (★★)

1) Montrer qu'il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que
$$\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-3,0,3\},\qquad \frac{9}{x(x^2-9)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{x+3}.$$
En déduire une primitive de $x\mapsto\dfrac{9}{x(x^2-9)}$ (sur un intervalle à préciser).
2) Montrer qu'il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que
$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{ax+b}{(x^2+2x+2)^2}+\frac{cx+d}{x^2+2x+2}.$$
En déduire une primitive de $x\mapsto\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+2x+2)^2}$ (sur un intervalle à préciser).

Exercice 5. A l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

1) (★) $\displaystyle\int_0^1 a^3e^{-\frac{a^2}{2}}\,da$, 2) (★) $\displaystyle\int_1^e \ln^2(w)\,dw$, 3) (★★) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)e^{\cos(t)}\,dt$.

Exercice 6. (★★) A l'aide d'intégrations par parties, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.

1) $x\mapsto\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$,
2) $x\mapsto\cos(\ln(x))$
(*On pourra faire deux IPP consécutives*),
3) $x\mapsto x^\alpha\ln(x)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$,
4) Arccos, la fonction réciproque de $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$.

Exercice 7. (★★) Avec un changement de variables, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$ (*changement de variable* $t=1+x^2$),

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5(x)\cos^3(x)\,dx$ (*changement de variable* $t=\sin(x)$),

3) $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$ (*changement de variable* $t=e^x$),

4) (★★★) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ (*changement de variable* $x=\cos(t)$).

Exercice 8. (★★) Avec un changement de variables, déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un intervalle à préciser.

$$1)\ x\mapsto e^{\sqrt{x}},\qquad 2)\ x\mapsto \frac{5x^2}{\sqrt{2-3x}},\qquad 3)\ x\mapsto \frac{\sqrt{1+x^3}}{x},\qquad 4)\ x\mapsto \tan^4(x).$$

On fera les changements de variables $t=e^{\sqrt{x}}$ *pour le* 1), $t=\sqrt{1+x^3}$ *pour le* 3) *et* $t=\tan(x)$ *pour le* 4) *(et on pourra utiliser le fait que, pour tout* $z\in\mathbb{R}$, $z^4=1+(z^2-1)(z^2+1)$*).*

Exercice 9. Soit $a>0$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}\,dx$

1) (★★) à l'aide du changement de variable $x=1/t$.

2) (★★★) en faisant des intégrations par parties successives.

Exercice 10. (★ à ★★) Calculer les intégrales suivantes :

$$1)\ \int_{-3}^{4}\frac{|x-1|}{|x|+1}\,dx,\qquad 2)\ \int_{-1}^{1} e^{-|u|}\,du,\qquad 3)\ \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{x^3}-e^{-x^3}}{\ln(3+\cos(\tan(x)))}\,dx,\qquad 4)\ \int_{4/e}^{2e}\frac{\lfloor y\rfloor}{y}\,dy.$$

II Utilisation des propriétés de l'intégrale

Exercice 11. (★★) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Exercice 12. (★) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=\frac{1}{2}$. En utilisant le théorème de Rolle, montrer que f admet un point fixe.

Exercice 13. (★) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Calculer

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\int_0^1 f(xt)\,dt.$$

Exercice 14. (★★) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=0$. Montrer que f est la fonction nulle. Est-ce encore vrai si f est seulement supposée continue par morceaux ?

Exercice 15 – Lemme de Riemann Lebesgue. (★★★) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt=0.$$

Exercice 16. (★) Soit $T > 0$. Soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

Exercice 17 – Formules de la moyenne. (★★) Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1) Soient f une fonction continue sur $[a,b]$ et g une fonction continue et positive sur $[a,b]$.
   a) Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $f([a,b]) = [m,M]$.
   b) Première formule de la moyenne : en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que
   $$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt.$$
   On traitera séparément le cas où l'intégrale de g entre a et b est nulle et le cas où elle est strictement positive.
2) Soit f une fonction positive, décroissante et de classe C^1 sur $[a,b]$. Soit g une fonction continue sur $[a,b]$. Posons $G : x \in [a,b] \longmapsto \displaystyle\int_a^x g(t)\,dt$.
   a) Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que $G([a,b]) = [m,M]$.
   b) Via une intégration par parties, montrer que $mf(a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant Mf(a)$.
   c) Seconde formule de la moyenne : montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt$.

Exercice 18 – Inégalité de Cauchy-Schwarz. (★★) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt}\,\sqrt{\int_a^b g(t)^2\,dt}.$$

Discuter le cas d'égalité. *On fera le lien avec le discriminant du trinôme $\int_a^b \big(f(t) + Xg(t)\big)^2\,dt$.*

III Suites et fonctions définies par une intégrale

Exercice 19. (★) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\,dt$.

1) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire $J_n = \ln(2) - I_n$ sous forme intégrale et montrer que $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
3) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 20. (★★) Considérons $f : x \longmapsto \displaystyle\int_{-x}^{2x} \sqrt{1+t^4}\,dt$.

1) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
2) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$.
3) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{3x^3} = 1$.

Exercice 21. (★★) Considérons $f : x \longmapsto \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}\,dt$.

1) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
2) En déduire que f est identiquement nulle sur son domaine de définition.

Exercice 22. (★★) Soit $\varphi : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\,dt$.

1) Montrer que φ est impaire sur $\mathbb{R}^*$.
2) Montrer soigneusement que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
3) Montrer que la fonction $\psi : x \longmapsto x\varphi'(x)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
4) En déduire une expression de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 23. (★★★) Considérons $F : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(xu)}{u^{3/2}}\,du$.

1) Calculer $F(0)$. A l'aide d'un encadrement, montrer que F est continue en 0.
2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. A l'aide d'un changement de variables, exprimer $F(x)$ en fonction d'une intégrale dont seules les bornes dépendent éventuellement de x.
3) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer sa dérivée.
4) Montrer que F est dérivable en 0.

   On pourra utiliser le fait (montré dans le TD3) que, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, $1 - \dfrac{y^2}{3} \leqslant \dfrac{\sin(y)}{y} \leqslant 1$.

Exercice 24. (★★) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=0$. Montrer que

$$\forall t \in [a,b], \qquad \int_a^t f(u)\,du + \int_0^{f(t)} f^{-1}(u)\,du = tf(t).$$

IV Sommes de Riemann

Exercice 25. Pour chacun des cas suivants, étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

1) (★) $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$,
2) (★) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{k^2+n^2}$,
3) (★) $u_n = \dfrac{1^x+2^x+\cdots+n^x}{n^{x+1}}$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$,
4) (★★) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$,
5) (★★) $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n\,n!}\right)^{\frac{1}{n}}$,
6) (★★★) $u_n = \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \exp\left(\frac{k}{2n}\right)$.

Exercice 26. (★) Calculer $\displaystyle\int_0^1 e^t\,dt$ à l'aide d'une somme de Riemann.

Exercice 27 – Intégrale de Poisson. (★★★) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. Posons $I(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(x^2+2x\cos(u)+1)\,du$.

1) Montrer que l'intégrale $I(x)$ existe et que $I(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|x+e^{iu}\right|\,du$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left|x - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right|$. Montrer que $I_n(x) = \ln|1-x^n|$.
3) En déduire une expression de $I(x)$.

Feuille d'exercice n° 15

Polynômes réels ou complexes

I Degré, coefficient dominant, opérations algébriques

Exercice 1. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

1) $P = (X-1)^n - (X+7)^n$,
2) $P = (X+2)^n + (1-X)^n$,
3) $P = \displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} (X^k + X + 1)$,
4) $P = \displaystyle\prod_{m=1}^{n} (3X^2 + 2mX + 1)$,
5) $P = \displaystyle\prod_{\ell=1}^{n} (\ell X^4 + 2i)^{\ell^2}$.

Exercice 2. (★) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant :

1) Le degré de la somme de deux polynômes est le plus grand des degrés.
2) Le degré du produit de deux polynômes est la somme de leurs degrés.
3) Si $n \in \mathbb{N}$, $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, alors $\alpha P + \beta Q \in \mathbb{K}_n[X]$.
4) Si $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3. (★) Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que

1) $(P+Q)' = P' + Q'$, 2) $(\lambda P)' = \lambda P'$, 3) $(PQ)' = P'Q + QP'$, 4) (★★) $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$.

Pour le dernier point, on pourra commencer par étudier la dérivée du polynôme Q^n avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. (★) Soient $n \in \mathbb{N}$ et P un polynôme de degré n. Montrer que $Q = X^2 P' - nXP \in \mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 5. (★★) Déterminer l'ensemble de polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Exercice 6. (★★) Déterminer l'ensemble de polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0$.
On pourra s'intéresser au coefficient dominant.

Exercice 7. (★★★) Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(jX) = P(X)$, où $j = e^{2i\pi/3}$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^3)$.

II Division euclidienne et divisibilité

Exercice 8. (★) Effectuer la division euclidienne de

1) $X^4 - 5X^3 + 3X^2 - X + 2$ par $B = X^2 + X - 3$.
2) $iX^3 + 3X - 1 + 2i$ par $B = X + 7i - 3$.
3) $X^5 + 1$ par $X^2 - 2X$.

Exercice 9. (★★) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le reste de la division euclidienne de

1) $X^7 - 3X^5 - 5X^3 + 1$ par $X - 2$,
2) $(X+2)^{2n} + (X+3)^n - 1$ par $X^2 + 5X + 6$,
3) $X^n - 4X + 2$ par $X(X+i)(X-2)$,
4) $(\cos(\theta) + X\sin(\theta))^n$ par $X^2 + 1$,
5) $(X-2)^{2n} + X - 3$ par $(X-1)^2$.

Exercice 10. (★★)

1) Montrer que, pour tout $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$, $1 + X + X^2$ divise $X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$.
2) A quelle condition sur $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 11. (★★★) Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ qui n'est pas le monôme X.

1) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X)^k - X^k$ est divisible par $P(X) - X$.
2) Montrer que $P(P(X)) - X$ est divisible par $P(X) - X$.

Exercice 12. (★★)

1) Déterminer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de $X^5 - 1$ par $(X+1)^2(X+2)$.
2) Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, -2\}, \qquad \frac{R(x)}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+2}.$$
On pourra attendre le chapitre suivant et se ramener à un système de trois équations d'inconnues a, b et c que l'on mettra sous forme échelonnée via la méthode du pivot de Gauss.
3) En déduire une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x^5 - 1}{(x+1)^2(x+2)}$ (sur des intervalles à préciser).

III Racines

Exercice 13. (★) Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant :

1) Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est de degré impair, alors P possède au moins une racine réel.
2) Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors P possède n racines distinctes.
3) Le polynôme $(X+i)^2(X-4)(X+\sqrt{2})^2$ est de degré 5 et possède trois racines distinctes.
4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\cos(n\pi/2)) = 0$. Alors $P = 0$.

Exercice 14. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme $1 + X + X^n \in \mathbb{R}[X]$ n'a que des racines simples.

Exercice 15. (★) Montrer que -2 est racine de $P = X^4 + X^3 - 18X^2 - 52X - 40$. Quelle est sa multiplicité ? Déterminer les autres racines de P.

Exercice 16. (★★★) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X-1)P(X+1)$. Montrer que, si a est une racine de P, alors on peut trouver une racine b de P telles que $|b| > |a|$. En déduire P.

Exercice 17. (★) Soit $T > 0$. Que dire d'un polynôme à coefficient réels qui est T-périodique ?

Exercice 18. (★★) Détermines tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $(X-2)P(X+1) = (X+1)P(X)$.

Exercice 19. (★) Existe-il un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \overline{z}$?

Exercice 20. (★★) Soit $k \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$. Déterminer tous les polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P \circ P = P^k$. *On pourra utiliser, en le justifiant, que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré supérieur ou égal à 1, alors $P(\mathbb{R})$ est infini.*

Exercice 21. (★) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ ayant exactement n racines réelles distinctes. Combien P' possède-il de racines réelles ?

Exercice 22 – Relations coefficients/racines. (★) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines (distinctes ou non) de P dans $\mathbb{C}$. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} \lambda_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Exercice 23 – D'après l'oral de ESCP. (★★★) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P' divise P.

1) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, $P = \frac{1}{n}(X-\alpha)P'$.
2) Établir une relation de récurrence entre les coefficients de P.
3) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur P.

Exercice 24 – Polynôme de Lagrange. (★★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

1) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, déterminer un polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant
   - $L_i(a_i) = 1$,
   - pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $j \neq i$, $L_i(a_j) = 0$.
2) Soient $b_1, \dots, b_n$ des réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $L(a_j) = b_j$.

IV Factorisation

Exercice 25. (★★) Factoriser (mettre sous forme de facteurs irréductibles) les polynômes

1) $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
2) $X^3 - 1$, $X^4 - 1$ et $X^5 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3) $X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ (*on donnera deux méthodes dont une utilisant le polynôme* $(X^2+1)^2$).
4) $X^6 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ (*on pensera à la formule de factorisation de* $a^n - b^n$ *pour* $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$).
5) $2X^5 - X^4 + 32X - 16$ dans $\mathbb{R}[X]$ (*on remarquera que* $1/2$ *est racine*).

Exercice 26. (★★) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 27. (★★) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant, pour tout $k \in [\![1,n+1]\!]$, $P(k) = \frac{1}{k}$.
Calculer $P(n+2)$.

Exercice 28. (★★★) Soient $n \geqslant 2$ un entier naturel. Posons $P_n = (X+1)^n - 1$.

1) Déterminer les racines de P_n dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
2) Calculer de deux façons le coefficient du terme d'indice 1 de P_n.
3) En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Feuille d'exercice n° 16

Systèmes linéaires

Exercice 1. (★) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

1) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{5y}{3} + \dfrac{3z}{2} = \dfrac{7}{3} \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{4y}{3} - \dfrac{11z}{6} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3y - 4z = -7 \\ 5x + 2z = 4 \\ -2x - y = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + + 5z = 2 \\ x + y + z = 3 \\ + 4y - 6z = 8 \\ -x - 3y + 2z = -7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 1 \\ 3x - y - z - 2t = 0 \\ -5x + 6z + 4t = 1 \\ 2x - 4y + 8z = -1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + y - z = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{3} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x + 6y + z - 3t + 7u = -3 \\ 3x + 5y + z - 2u = 2 \\ 2x + 8y + 5z + 6t - 7u = 5 \\ -4x - 2y + 3z + 6t - 3u = 1 \\ -5x - y + 3z + 3t + 6u = -4 \end{cases}$

Exercice 2. (★) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes linéaires suivants :

1) $\begin{cases} ix + 2y - z = -5+2i \\ 3x - 4iy = 9 \\ ix + 7y + 3iz = 3+i \end{cases}$

2) $\begin{cases} -ix - y + z = 2-i \\ + (1+i)y + 2z = 1-i \\ x - iy + (1-i)z = 2 \\ x + (1-2i)y - iz = i \end{cases}$

Exercice 3. (★★)

1) On cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(1) = P(-1) = P'(1) = 1$. Un tel polynôme existe-il ? Est-il unique ?
2) Même question avec $P \in \mathbb{R}_4[X]$ vérifiant, pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$, $P(k) = k$

Exercice 4. (★) On cherche $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0, 1, 3\}, \qquad \frac{5x^2 + 2x - 1}{x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1} + \frac{\delta}{x-3}.$$

Un tel quadruplet de réels existe-t-il ? Est-il unique ?

Exercice 5. (★★) Soient $\mu, \rho, \theta, \alpha, \beta$ des réels. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires à paramètres suivants :

1) $\begin{cases} \mu x + (2\mu+1)y = 4\mu+1 \\ (5\mu+3)x + (\mu-1)y = 5\mu-1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \rho x + y + z = \theta \\ x + \rho y + z = \theta+1 \\ x + y + \rho z = \theta+2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} - y + 2z - 4t = 0 \\ -7x + 6y - 12z + 3t = \mu \\ 7x - 3y + 6z + 9t = -\mu \\ -x + y - 2z + t = 1 \end{cases}$

4) (★★★) $\begin{cases} \alpha x + \beta y + z = 1 \\ x + \alpha\beta y + z = \beta \\ x + \beta y + \alpha z = 1 \end{cases}$

Exercice 6. (★★) Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système linéaire dépendant du paramètre $m \in \mathbb{C}$,

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = 1 \end{cases}$$

Feuille d'exercice n° 17

Matrices

I Calcul matriciel

Exercice 1. (★) Calculer $A+B$, $A-2B$, AB et BA (si c'est possible) lorsque

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -7 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

3) $A = \begin{pmatrix} i & 2+3i \\ 1+i & -4i \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 7i \\ 4-5i & -i \end{pmatrix}$,

4) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$,

5) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{17}{5} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{11} & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{13} & \frac{5}{4} \\ 2 & \frac{5}{12} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Exercice 2. (★) Calculer la transposée des matrices $A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & i & 1 & -i \\ 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 12 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, notons $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice (i,j) qui est égal à 1. Calculer $E_{i,j}E_{k,\ell}$ pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$.

Exercice 4. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle trace de la matrice $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1) Soit $(A,B,\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K}$. Montrer que $\mathrm{tr}(A+\lambda B) = \mathrm{tr}(A) + \lambda\,\mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$.
3) Existe-t-il $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que $AB - BA = \mathrm{I}_n$?

Exercice 5. (★) Calculer $P(A)$ lorsque

1) $P = X^2 - 5X$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2) $P = (X+1)(X-2)(X-5)$ et $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -6 & 7 & -3 \\ -6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. (★★) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2x_n & 1-2x_n & 2x_n \\ x_n & -x_n & x_n+1 \end{pmatrix}$.
2) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
3) En déduire l'expression de M^n en fonction de n.

Exercice 7. (★) Considérons $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -10 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. En considérant $B = A - 3\mathrm{I}_3$, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. (★) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer M_α^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. (★★) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.
2) a) Montrer qu'il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = x_n A + y_n \mathrm{I}_3$.
   b) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression en fonction de x_n et y_n en fonction de n.
3) Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X - 3$. et retrouver le résultat.

II Matrices inversibles

Exercice 10. (★) A l'aide d'un polynôme annulateur, montrer que les deux matrices de l'exercice 5 sont inversibles et calculer leur inverse.

Exercice 11. (★) Considérons à nouveau la matrice A de l'exercice 9. Est-ce que A est inversible ? Si oui, exprimer son inverse en fonction de A et I_n. Vérifier le calcul par la méthode de Gauss-Jordan.

Exercice 12. (★) En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, calculer l'inverse (s'il existe) des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. (★★★) Considérons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer les réels λ tels que la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_3$ n'est pas inversible.

Exercice 14. (★) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $u_0 = 1$, $v_0 = -2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n - 3v_n \end{cases}$$

1) Posons $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et calculer $P^{-1}AP$.
2) Calculer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3) En déduire u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. (★★) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} = 3u_{n+2} + u_{n+1} - 3u_n.$$

1) Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$. Montrer que $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et calculer $P^{-1}AP$.
2) Calculer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3) En déduire u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16. (★★) Considérons $M = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -7 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $P = X^3 - 2X^2 + X$ est un polynôme annulateur de M.
2) Est-ce que M est inversible ?
3) Calculer M^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17. (★★) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, posons $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1) Montrer que, pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta')$.
2) En déduire $R(\theta)^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $R(\theta)$ est inversible et calculer $R(\theta)^{-1}$.

Exercice 18. (★★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, posons

$$M_{i,j} = \mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}, \quad D_i(\alpha) = \mathrm{I}_n + (\alpha - 1)E_{i,i} \quad \text{et} \quad T_{i,j}(\alpha) = \mathrm{I}_n + \alpha E_{i,j}.$$

Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) En quoi consiste le produit $M_{i,j}A$? En déduire que $M_{i,j}$ est inversible et calculer $M_{i,j}^{-1}$.
2) En quoi consiste le produit $D_i(\alpha)A$? En déduire que $D_i(\alpha)$ est inversible et calculer $D_i(\alpha)^{-1}$.
3) En quoi consiste le produit $T_{i,j}(\alpha)A$? En déduire que $T_{i,j}(\alpha)$ est inversible et calculer $T_{i,j}(\alpha)^{-1}$.

Exercice 19. (★★★) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Notons J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donnons-nous $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et considérons $M_n = a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J}_n$.

1) Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2) a) Supposons que $a = 0$. Montrer que M n'est pas inversible.
   b) Supposons que $a = -nb$. Notons U_n la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer MU_n et en déduire que M n'est pas inversible.
   c) Supposons que $a \notin \{0, -nb\}$. Montrer que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $M^{-1} \in \mathcal{E}_n$ (on explicitera les coordonnées de M^{-1} dans la base $\mathcal{B}_n$).
3) Pour anticiper sur le chapitre suivant... montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n = \left\{a\mathrm{I}_n + b\mathrm{J}_n \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on précisera en une base.

Feuille d'exercice n° 18

Introduction aux espaces vectoriels

Exercice 1. (★) Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x=y\}$.
2) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x\leqslant y\}$.
3) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x=1+2y\}$.
4) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2\leqslant 1\}$.
5) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2=0\}$.
6) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2-y^2=0\}$.
7) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, 5x+2z=0\}$.
8) $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{c} x-y+z=0 \\ \text{et } 2x-y=0 \end{array}\right\}$.
9) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, (x-y)^2=2x+y\}$.
10) $\{(x-y,2x+y,y) \,|\, (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.
11) $\mathbb{Z}^2=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
12) $\{z\in\mathbb{C} \,|\, \mathfrak{Re}(z)=1\}$.
13) L'ensemble des suites réelles bornées.
14) L'ensemble des suites réelles croissantes.
15) (★★) L'ensemble des suites monotones.
16) (★★) L'ensemble des suites géométriques.
17) L'ensemble des suites arithmétiques.
18) L'ensemble $E_{a,b}$ des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de paramètres a et b, où $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.
19) L'ensemble des suites qui convergent vers -1.
20) $\{P\in\mathbb{K}[X] \,|\, \deg(P)=n\}$, pour $n\in\mathbb{N}$.
21) $\{P\in\mathbb{K}[X] \,|\, A$ divise $P\}$, pour $A\in\mathbb{K}[X]$.
22) $\{P\in\mathbb{K}[X] \,|\, 0$ est racine $P\}$.
23) $\{P\in\mathbb{K}[X] \,|\, 0$ est racine double de $P\}$.
24) (★★) L'ensemble des fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui s'annulent.
25) L'ensemble des fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$, où $T>0$.
26) (★★★) L'ensemble des fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$.
27) L'ensemble des fonctions affines.
28) L'ensemble des bijections de $[a,b]$ sur $\mathbb{R}$.
29) L'ensemble des fonctions dérivables sur $[a,b]$ telles que $f(a)=f'(a)=0$,
30) $\{M\in\mathcal{M}_n(K) \,|\, M^2=M\}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
31) $\left\{f\in C^0([a,b],\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_a^b f(t)\,dt=0\right\}$ pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$.

Exercice 2. (★★★) Soit F et G deux s.e.v de E. Montrer que si $F\cup G$ est un s.e.v de E, alors $F\subset G$ ou $G\subset F$. *Autrement dit l'union de deux s.e.v est un s.e.v si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.*

Exercice 3. (★★) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Soient $(P_1,\dots,P_k)$ une famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ tels que $\deg(P_1)<\deg(P_2)<\cdots<\deg(P_k)$. Montrer qu'il s'agit d'une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 4. (★★) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\left(x\mapsto 1,\, x\mapsto e^x,\, x\mapsto e^{2x},\, \dots,\, x\mapsto e^{nx}\right)$ est une famille libre dans $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 5. (★★) Soient $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites telles que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=1$, $v_n=n$, $w_n=2^n$ et $x_n=3^n$. Montrer que (u,v,w,x) est une famille libre de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Exercice 6. (★) Notons $\overrightarrow{u}=(1,\,i,\,-3)$, $\overrightarrow{v}=(1-i,\,2,\,i)$ et $\overrightarrow{w}=(2+i,\,3i,\,-4)$.

1) Est-ce que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est une famille liée de $\mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{C}$-e.v ?
2) Est-ce que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ est une famille liée de $\mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{R}$-e.v ?

Exercice 7. (★) Soit $(x_1,\dots,x_5)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1) (x_5,x_1), 2) $(x_1,2x_2,3x_3)$, 3) $(x_1,2x_3+x_2,x_5+3x_1)$, 4) $(x_1,x_1-3x_2,x_3+2x_2,2x_3+x_2)$.

Exercice 8. (★★) Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Les familles $(x_1-x_2,x_2-x_3,\dots,x_n-x_1)$ et $(x_1,x_1+x_2,\dots,x_1+\cdots+x_n)$ sont-elles encore libres ?

Exercice 9. (★★★) Montrer que les seuls sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites vectorielles (c'est-à-dire les sous-espaces $\{\lambda u \,|\, \lambda\in\mathbb{R}\}$, $u\in\mathbb{R}^2$).

Exercice 10. (★) Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une famille génératrice simple.

1) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y=0\}$.
2) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+7z=y\}$.
3) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} x-y+z=0 \\ \text{et } 2x-y=0 \end{array}\right\}$.
4) $\{(z, x-y+z, 2x) \,|\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$.
5) $\{P \in \mathbb{K}_4[X] \,|\, P(2)=0\}$.
6) $\{P \in \mathbb{C}_2[X] \,|\, P(1-X)=P(X)\}$.
7) **(★★)** $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \forall n \geqslant 4,\ u_n=0\}$.

Exercice 11. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une base de l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Même question pour l'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques.

Exercice 12. (★★) Trouver un système d'équations [1] du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille de vecteurs
$\big((1,0,2,1),(0,3,-1,2),(3,-3,7,1)\big)$. Est-ce une famille libre de $\mathbb{R}^4$? Une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 13. (★) Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1) $\mathrm{Vect}\,\big((3,1,-7),(4,-2,-8),(-3,4,5)\big)$ dans $\mathbb{R}^3$,
2) $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+2y+3z-t=0\}$ dans $\mathbb{R}^4$,
3) $\{P \in \mathbb{R}_5[X] \,|\, P(1)=P'(1)=0\}$ dans $\mathbb{R}_5[X]$.

Exercice 14. (★) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner des bases de $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vu comme des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Exercice 15. (★★) Soient a, b et c des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Introduisons les polynômes $P_0=1$, $P_1=(X-a)$ et $P_2=(X-a)(X-b)$.

1) A l'aide du théorème de division euclidienne, montrer que (P_0,P_1,P_2) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
2) Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (P_0,P_1,P_2) en fonction de $P(a),P(b),P(c)$.

Exercice 16. (★★) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $E=\{x \longmapsto P(x)\sin(x)+Q(x)\cos(x) \,|\, (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dont on déterminera une base.

Exercice 17. (★★) On considère l'ensemble

$$F=\big\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\big|\, \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=a\cos(2x)+b\cos(x)+c\big\}.$$

1) Montrer que F est un $\mathbb{R}$-e.v. En déterminer une base.
2) Est-ce que la famille $\big(x \mapsto \cos^2(x),\ x \mapsto 1,\ x \mapsto \cos(2x)\big)$ est une base de F ?
3) Montrer que la famille $\big(x \mapsto \cos^2(x),\ x \mapsto \sin^2(x),\ x \mapsto \cos(x)\big)$ est une base de F.
4) Déterminer les coordonnées de $f : x \longmapsto 1+\cos(x)+\cos^2(x)$ dans les deux bases de F que l'on a déterminées.

Exercice 18. (★★) Introduisons $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

1) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2) Déterminer une base $\mathcal{B}$ (*la plus simple possible*) de $\mathcal{A}$.
3) A l'aide de la méthode de Gauss, montrer que $\mathcal{A} \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})=\varnothing$.
4) Soit $M \in \mathcal{A}$.
   a) Calculer M^2 et M^3. Remarquer que $M^3 \in \mathcal{A}$.
   b) Exprimer les coordonnées de M^3 dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des coordonnées de M.
   c) En déduire un polynôme annulateur de M.
   d) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer M^k en fonction de k, M, M^2 et des coordonnées de M dans la base $\mathcal{B}$.

1. C'est-à-dire un système dont l'ensemble des solutions est le sous-espace vectoriel concerné.

Annexe A : quelques conseils pour bien rédiger les Mathématiques

En mathématiques, une bonne rédaction est essentielle car elle permet de vérifier la justesse et la rigueur de ce qui est énoncé. Bien rédiger s'acquiert principalement par l'usage. Voici quelques règles de rédaction à respecter absolument :

• Un texte mathématique doit pouvoir se lire comme n'importe quel texte. Il faut donc faire des phrases correctes et complètes qui respectent notamment les règles de grammaire de la langue utilisée (le français en ce qui nous concerne) ainsi que les règles de ponctuation afin de structurer la phrase et la rendre intelligible. Sauf exceptions, on évitera aussi les abréviations (à moins de les définir).

• Il faut utiliser les symboles mathématiques avec parcimonie et rédiger le plus possible en français. Surtout il est très important de ne pas mélanger texte en français et symboles mathématiques :

- ou bien on écrit une formule uniquement avec des symboles mathématiques (et éventuellement les connecteurs logiques et, ou, non) après un saut de ligne. À noter que même une formule ne comportant que des symboles mathématiques doit former une phrase correcte lorsqu'on la lit à voix haute. On peut y ajouter des parenthèses s'il y a un risque d'ambiguïté.
- ou bien on écrit une phrase en français mais alors les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et $\exists!$ ainsi que les symboles d'implication $\Rightarrow$ et d'équivalence $\Leftrightarrow$ ne doivent surtout pas être employés comme des abréviations au milieu du texte.

Les autres symboles mathématiques sont en général tolérés au sein d'une phrase rédigée en français, en particulier les signes d'opération ($+, -, \times, /, \circ$, etc.), d'égalité et d'inégalité ($=, \leqslant, \geqslant, <, >$), d'appartenance ($\in, \notin$) et d'inclusion ($\subset, \subsetneq$, etc.)... à condition qu'ils ne servent pas d'abréviation.

> *Par exemple, on n'écrira pas « L'ensemble A est $\subset$ dans E » mais « L'ensemble A est inclus dans E » ou encore « Nous avons $A \subset E$ ». Autre exemple : on n'écrira pas « Le réel x est $<$ à 2 » mais « Le réel x est strictement inférieur à 2 » ou encore « Nous avons $x < 2$ » ou encore « Nous avons $x \in \,]-\infty, 2[$ ».*

• Les articulations logiques sont très importantes en mathématiques. Pour rendre la lecture plus agréable, pensons aux synonymes du mot *donc* : *par conséquent, d'où, il s'ensuit, on en déduit*, etc. Pour distinguer les hypothèses des conclusions, on pensera aussi à utiliser : *or, de plus, en outre, ensuite, mais, cependant, puisque, car, comme, enfin, finalement* etc. On évite par contre d'utiliser les expressions *du coup* (abus de langage) ou *au final* (grammaticalement fausse).

Les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sont souvent mal utilisés par les "novices en Mathématiques".

- Le symbole $\Rightarrow$ ne signifie pas *donc* mais *implique*. Il est recommandé de l'utiliser le moins possible.
- Le symbole $\Leftrightarrow$ signifie *si et seulement si*. Avant de l'utiliser, il est indispensable de s'assurer que la proposition à gauche du symbole implique celle à droite ET RÉCIPROQUEMENT. Souvent dans un raisonnement, il n'est pas utile de savoir que la réciproque d'une implication est vraie ; dans ce cas autant éviter ce symbole et préférer *donc*.

• On introduit tous les objets mathématiques avant de les utiliser, en général via les termes *Soit*, *Considérons*, *Donnons-nous*, etc.

> *Par exemple « Donnons-nous x dans $[-1, +\infty[$ », « Considérons f une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ », « Soit z un nombre complexe ».*

On pensera aussi à donner des noms aux objets mathématiques que l'on utilise souvent dans un raisonnement.

> *Par exemple, si la constante $4\pi e^{-\sqrt{2}}$ se retrouve à plusieurs reprises dans un calcul, on pourra écrire « Posons $c = 4\pi e^{-\sqrt{2}}$ » et remplacer $4\pi e^{-\sqrt{2}}$ par c dans tout ce qui suit.*

• Pour aider le lecteur, on annonce ce que l'on va faire et on termine par une conclusion.

Par exemple, on peut commencer par écrire « Montrons que... » et terminer par « Nous avons donc montré que... ».

Dans un devoir, on souligne les conclusions et on encadre les formules que l'on vient de démontrer.

• Lorsqu'on obtient un résultat qui est manifestement faux ou qui n'est pas le résultat attendu, on commence par rechercher l'erreur. Si l'erreur persiste, on le mentionne sur sa copie et surtout on évite de bluffer en truquant quelques lignes de la preuve pour faire apparaitre la bonne réponse comme par magie (le correcteur le verra tout de suite et la confiance sera perdue...).

Annexe B : alphabet grec

(utilisation en Mathématiques)

nom	**minuscule**	**majuscule**	**équivalent latin**
alpha	α	A	a
bêta	β	B	b
gamma	γ	Γ	g
delta	δ	Δ	d
epsilon	ε	E	e
zêta	ζ	Z	z
êta	η	H	ê
thêta	θ ou ϑ	Θ	th
iota	ι	I	i
kappa	κ	K	k
lambda	λ	Λ	l
mu	μ	M	m
nu	ν	N	n
xi	ξ	Ξ	x
omicron	o	O	o
pi	π	Π	p
rho	ρ ou ϱ	P	r
sigma	σ	Σ	s
tau	τ ou τ	T	t
upsilon	υ	Υ	y
phi	ϕ ou φ	Φ	ph
chi	χ	X	kh
psi	ψ	Ψ	ps
omega	ω	Ω	ô

À cause de leur similitude avec les lettres latines, on évitera cependant d'utiliser les minuscules grecques ι (iota) et o (omicron) et les majuscules grecques A, B, E, Z, H, I, K, M, N, O, P, T et X.