Interrogation écrite n$^{\text{o}}$ 1

(corrigé)

A

Dans tout l'énoncé, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ désignent des propositions.

1) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Donner la définition de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un réel positif x.

Il existe un unique réel positif y vérifiant $y^n = x$. On l'appelle racine $n^{\text{ième}}$ de x et on le note $\sqrt[n]{x}$ ou $x^{1/n}$.

2) Qu'est-ce que l'ensemble des réels x vérifiant $|x| \geqslant \dfrac{5}{2}$? $\boxed{\left]-\infty, -\dfrac{5}{2}\right] \cup \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right[}$

3) Nier la proposition

$$\forall \varepsilon \in]0,7], \qquad \exists \delta > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \big(1 < x \leqslant 1+\delta \qquad \Longrightarrow \qquad \ln(x) > \varepsilon(x-1)\big).$$

$\exists \varepsilon \in]0,7], \qquad \forall \delta > 0, \qquad \exists x \in \mathbb{R}, \qquad \big(1 < x \leqslant 1+\delta \qquad \text{et} \qquad \ln(x) \leqslant \varepsilon(x-1)\big)$

4) Corriger la grave erreur de rédaction dans la phrase :

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},}$ notons $P(n)$ la proposition « ~~Pour tout $n \in \mathbb{N}$~~, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. »

Écrire le début de la rédaction de l'étape d'hérédité dans la démonstration par récurrence d'une propriété P portant sur les entiers naturels (initialisée à $n_0 = 1$).

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ (fixé). Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

5) Pour exprimer que $(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A})$, on peut dire (barrer les phrases incorrectes) :

- ~~$\mathcal{C}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{A}$.~~
- Pour que $\mathcal{A}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{C}$ soit vraie.
- ~~Si $\mathcal{C}$ est fausse, alors $\mathcal{A}$ est fausse.~~
- Pour que $\mathcal{A}$ soit fausse, il faut que $\mathrm{non}(\mathcal{C})$ soit vraie.

6) Écrire le début de la rédaction de la démonstration de $(\mathcal{C} \Rightarrow \mathrm{non}(\mathcal{A}))$ par l'absurde.

Supposons que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont vraies et montrons que l'on aboutit à une contradiction.

7) Soient a, b et c des réels tels que $a < 0$ et $b^2 - 4ac > 0$. Pour quelles valeurs du réel x a-t-on $ax^2 + bx + c \leqslant 0$?

On a $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ si et seulement si $x \in \left]-\infty, \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right] \cup \left[\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, +\infty\right[$.

8) Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E. A l'aide de quantificateurs, exprimer le fait qu'aucun des éléments de E ne vérifie la propriété P.

$\forall x \in E, \ \mathrm{non}(P(x))$.

9) Soient a, b, c d et m des réels. Montrer que, si $a \equiv b\,[m]$ et $c \equiv d\,[m]$ alors $(a+c) \equiv (b+d)\,[m]$.

Supposons que $a \equiv b\,[m]$ et $c \equiv d\,[m]$. Par définition, il existe alors k et ℓ des entiers relatifs tels que $a = b + km$ et $c = d + \ell m$. Par conséquent $a + c = b + km + d + \ell m = b + d + (k+\ell)m$. Puisque $k + \ell \in \mathbb{Z}$, nous en déduisons que $(a+c) \equiv (b+d)\,[m]$.

10) Soient x et y deux réels tels que $x < y < 0$. Sous quelles hypothèses sur $n \in \mathbb{Z}^*$ a-t-on $x^n > y^n$?

Soient x et y deux réels tels que $x < y < 0$. Soit n un entier non nul. Nous avons $x^n > y^n$ si et seulement si (n est pair et positif) ou (n est impair et négatif).

Interrogation écrite n° 1

(corrigé)

B

Dans tout l'énoncé, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ désignent des propositions.

1) Pour exprimer que $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D})$, on peut dire (barrer les phrases incorrectes) :

- ~~Pour que $\mathcal{B}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{D}$ soit vraie.~~
- Si $\mathcal{D}$ est fausse, alors $\mathrm{non}(\mathcal{B})$ est vraie.
- ~~Pour que $\mathcal{B}$ soit fausse, il faut que $\mathcal{D}$ soit fausse.~~
- $\mathcal{D}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{B}$.

2) Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E. A l'aide de quantificateurs, exprimer le fait qu'un élément de E et un seul ne vérifie pas P.

$\exists\,!x \in E,\ \mathrm{non}(P(x))$

3) Écrire le début de la rédaction de la démonstration de $(\mathrm{non}(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{D})$ par contraposée.

Supposons que $\mathrm{non}(\mathcal{D})$ est vraie et montrons que $\mathcal{B}$ est vraie.

4) Donner la définition de la partie entière d'un réel x (sans démonstration).

Il existe un unique entier n vérifiant $n \leqslant x < n+1$. Cet entier est appelée partie entière de x et notée $\lfloor x \rfloor$.

5) Soient x et y deux réels tels que $x < y < 0$. Sous quelles hypothèses sur $n \in \mathbb{Z}^*$ a-t-on $x^n < y^n$?

Soient x et y deux réels tels que $x < y < 0$. Soit n un entier non nul. Nous avons $x^n < y^n$ si et seulement si (n est pair et négatif) ou (n est impair et positif).

6) Qu'est-ce que l'ensemble des réels x vérifiant $|x| < \dfrac{3}{7}$? $\boxed{\left]-\dfrac{3}{7}, \dfrac{3}{7}\right[}$

7) Nier la proposition

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \qquad \exists \varepsilon > 0, \qquad \exists n \in \mathbb{N}, \qquad \big(n \geqslant 10 \qquad \text{et} \qquad |\cos(n) - \ell| > \varepsilon\big).$$

$\exists \ell \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(n < 10 \quad \text{ou} \quad |\cos(n) - \ell| \leqslant \varepsilon\big).$
ou encore : $\exists \ell \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(n \geqslant 10 \quad \Longrightarrow \quad |\cos(n) - \ell| \leqslant \varepsilon\big).$

8) Corriger la grave erreur de rédaction dans la phrase :

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},}$ notons $P(n)$ la proposition « ~~Pour tout $n \in \mathbb{N}$~~, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. »

Écrire le début de la rédaction de l'étape d'hérédité dans la démonstration par récurrence d'une propriété P portant sur les entiers naturels (initialisée à $n_0 = 0$).

Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ (fixé). Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

9) Soient a, b, c et m des réels. Montrer que, si $a \equiv b\,[m]$ et $b \equiv c\,[m]$, alors $a \equiv c\,[m]$.

Supposons que $a \equiv b\,[m]$ et $b \equiv c\,[m]$. Par définition, il existe alors k et ℓ des entiers relatifs tels que $a = b + km$ et $b = c + \ell m$. Par conséquent $a = b + km = c + \ell m + km = c + (k+\ell)m$. Puisque $k + \ell \in \mathbb{Z}$, nous en déduisons que $a \equiv c\,[m]$.

10) Soient a, b et c des réels tels que $a > 0$ et $b^2 - 4ac > 0$. Pour quelles valeurs du réel x a-t-on $ax^2 + bx + c < 0$?

On a $ax^2 + bx + c < 0$ si et seulement si $x \in \left]\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right[$.