Interrogation écrite n° 1

mercredi 12 septembre 2018

A

NOM : **PRÉNOM :**

Dans tout l'énoncé, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ désignent des propositions.

1) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Donner la définition de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un réel positif x.

2) Qu'est-ce que l'ensemble des réels x vérifiant $|x| \geqslant \dfrac{5}{2}$?

3) Nier la proposition

$$\forall \varepsilon \in]0,7], \qquad \exists \delta > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \big(1 < x \leqslant 1+\delta \qquad \Longrightarrow \qquad \ln(x) > \varepsilon(x-1)\big).$$

4) Corriger la grave erreur de rédaction dans la phrase :

Notons $P(n)$ la proposition « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. »

Écrire le début de la rédaction de l'étape d'hérédité dans la démonstration par récurrence d'une propriété P portant sur les entiers naturels (initialisée à $n_0 = 1$).

5) Pour exprimer que $(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A})$, on peut dire (barrer les phrases incorrectes) :

- $\mathcal{C}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{A}$.
- Pour que $\mathcal{A}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{C}$ soit vraie.
- Si $\mathcal{C}$ est fausse, alors $\mathcal{A}$ est fausse.
- Pour que $\mathcal{A}$ soit fausse, il faut que $\mathrm{non}(\mathcal{C})$ soit vraie.

6) Écrire le début de la rédaction de la démonstration de $(\mathcal{C} \Rightarrow \mathrm{non}(\mathcal{A}))$ par l'absurde.

7) Soient a, b et c des réels tels que $a < 0$ et $b^2 - 4ac > 0$. Pour quelles valeurs du réel x a-t-on $ax^2 + bx + c \leqslant 0$?

8) Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E. A l'aide de quantificateurs, exprimer le fait qu'aucun des éléments de E ne vérifie la propriété P.

9) Soient a, b, c d et m des réels. Montrer que, si $a \equiv b\,[m]$ et $c \equiv d\,[m]$ alors $(a + c) \equiv (b + d)\,[m]$.

10) Soient x et y deux réels tels que $x < y < 0$. Sous quelles hypothèses sur $n \in \mathbb{Z}^*$ a-t-on $x^n > y^n$?

Interrogation écrite n° 1

mercredi 12 septembre 2018

B

NOM : **PRÉNOM :**

Dans tout l'énoncé, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ désignent des propositions.

1) Pour exprimer que $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D})$, on peut dire (barrer les phrases incorrectes) :

- Pour que $\mathcal{B}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{D}$ soit vraie.
- Si $\mathcal{D}$ est fausse, alors $\mathrm{non}(\mathcal{B})$ est vraie.
- Pour que $\mathcal{B}$ soit fausse, il faut que $\mathcal{D}$ soit fausse.
- $\mathcal{D}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{B}$.

2) Soit P une propriété portant sur les éléments d'un ensemble E. A l'aide de quantificateurs, exprimer le fait qu'un élément de E et un seul ne vérifie pas P.

3) Écrire le début de la rédaction de la démonstration de $(\mathrm{non}(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{D})$ par contraposée.

4) Donner la définition de la partie entière d'un réel x (sans démonstration).

5) Soient x et y deux réels tels que $x < y < 0$. Sous quelles hypothèses sur $n \in \mathbb{Z}^*$ a-t-on $x^n < y^n$?

6) Qu'est-ce que l'ensemble des réels x vérifiant $|x| < \dfrac{3}{7}$?

7) Nier la proposition

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \qquad \exists \varepsilon > 0, \qquad \exists n \in \mathbb{N}, \qquad \big(n \geqslant 10 \qquad \text{et} \qquad |\cos(n) - \ell| > \varepsilon\big).$$

8) Corriger la grave erreur de rédaction dans la phrase :

$$\text{Notons } P(n) \text{ la proposition « Pour tout } n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{n(n+1)}{2}.\text{ »}$$

Écrire le début de la rédaction de l'étape d'hérédité dans la démonstration par récurrence d'une propriété P portant un entier naturel (initialisée à $n_0 = 0$).

9) Soient a, b, c et m des réels. Montrer que, si $a \equiv b\,[m]$ et $b \equiv c\,[m]$, alors $a \equiv c\,[m]$.

10) Soient a, b et c des réels tels que $a > 0$ et $b^2 - 4ac > 0$. Pour quelles valeurs du réel x a-t-on $ax^2 + bx + c < 0$?