Correction du DS n° 4

Exercice 1 : Questions en vrac (le retour)

1) La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt[5]{1-x^2}}$ est continue sur l'intervalle $]-1,1[$ donc elle admet une primitive sur $]-1,1[$. Elle s'écrit sous la forme $f = \dfrac{-1}{2}u'u^\alpha$ avec $u : x \longmapsto 1-x^2$ et $\alpha = -\dfrac{1}{5}$. Une primitive sur $]-1,1[$ est donc $\dfrac{-1}{2}\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} = -\dfrac{u^{-1/5+1}}{2(-1/5+1)} = -\dfrac{u^{4/5}}{8/5} = -\dfrac{5u^{4/5}}{8}$.
   Nous en déduisons que $\boxed{x \longmapsto -\frac{5}{8}(1-x^2)^{4/5} \text{ est une primitive de } x \longmapsto \frac{x}{\sqrt[5]{1-x^2}} \text{ sur }]-1,1[.}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

   avec $f : x \longmapsto \dfrac{1+x}{1+x^2}$ continue sur $[0,1]$. Le théorème de convergence des sommes de Riemann entraîne que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} &= \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= [\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 + \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\
&= \mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}(0) + \frac{1}{2}\ln(1+1^2) - \frac{1}{2}\ln(1+0^2) = \boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}.}
\end{aligned}$$

3) La fonction $x \longmapsto 7 + e^{-x}$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $x \longmapsto \dfrac{1}{7+e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{7+e^{-t}}\,dt$.

   Faisons le changement de variable $t = \ln(u)$ avec $\ln$ de classe C^1 sur $[1, e^x]$ ($u = 1$ quand $t = 0$ et $u = e^x$ quand $t = x$). On a « $dt = \dfrac{du}{u}$ » :

$$\int_1^{e^x} \frac{1}{7+e^{-\ln(u)}}\frac{du}{u} = \int_1^{e^x} \frac{du}{7u+1} = \left[\frac{1}{7}\ln(7u+1)\right]_1^{e^x} = \frac{1}{7}\ln(7e^x+1) - \frac{1}{7}\ln(7).$$

   Ainsi $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{7}\ln(7e^x+1) \text{ est une primitive de } x \longmapsto \frac{1}{7+e^x} \text{ sur } \mathbb{R}.}$

4) On a $P(-j) = (-j)^4 - 3(-j)^3 + 8(-j)^2 + 7j + 5 = j + 3 + 8j^2 + 7j + 5 = 8(1+j+j^2) = 0$. Ainsi $-j$ est racine de P. Puisque $P \in \mathbb{R}[X]$, il s'ensuit que $-\overline{j} = \overline{-j}$ est racine de P. Nous en déduisons que le polynôme P est divisible par $(X+j)(X+\overline{j}) = X^2 + (j+\overline{j})X + j\overline{j} = X^2 - X + 1$.

On trouve, via une division euclidienne, que $P = (X^2 - X + 1)(X^2 - 2X + 5)$. Le polynôme du second degré $X^2 - 2X + 5$ admet pour discriminant $-16 < 0$ si bien que

$$\boxed{P = (X^2 - X + 1)(X^2 - 2X + 5) \quad \text{est la factorisation de } P \text{ dans } \mathbb{R}[X].}$$

Ensuite $X^2 - 2X + 5$ admet pour racines $\dfrac{2+4i}{2} = 1 + 2i$ et $1 - 2i$. Ainsi

$$\boxed{P = (X + j)(X + \overline{j})(X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i) \quad \text{est la factorisation de } P \text{ dans } \mathbb{C}[X].}$$

5) Soit P un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$. Montrons qu'il est surjectif. Donnons-nous $y \in \mathbb{C}$. Le polynôme $P - y$ est non constant dans $\mathbb{C}[X]$ donc il admet une racine complexe z d'après le théorème de D'Alembert-Gauss, c'est-à-dire, $P(z) = y$. Ainsi $\boxed{P \text{ est surjectif.}}$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad (P - X^n)(k) = P(k) - k^n = 0.$$

Autrement dit le polynôme $P - X^n \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $n + 1$ racines distinctes. Il s'agit donc du polynôme nul : $P = X^n$. Ainsi $\boxed{P = X^n.}$

7)

```
function L=Riemann2(n)
    s=0; L=[];
    for  k=1:n
        s=s+1/k∧2; L=[L,s]
    end
endfunction
```

Exercice 2 : Calcul de $\zeta(2)$ à l'aide d'intégrales

Partie A : Écriture de $(S_n)_{n\geqslant 1}$ à l'aide d'intégrales

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Faisons une intégration par parties avec les fonctions $u_1 : t \longmapsto \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ et $v_1 : t \longmapsto \dfrac{\sin(kt)}{k}$ de classe C^1 sur $[0, \pi]$. On a $u_1' : t \longmapsto \dfrac{t}{\pi} - 1$ et $v_2' : t \longmapsto \cos(kt)$:

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{\sin(kt)}{k}\, dt = -\frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(kt)\, dt,$$

car $\sin(k\pi) = 0$. Faisons une deuxième intégration par parties avec les fonctions $u_2 : t \longmapsto \dfrac{t}{\pi} - 1$ et $v_2 : t \longmapsto \dfrac{-\cos(kt)}{k}$ de classe C^1 sur $[0, \pi]$. On a $u_2' : t \longmapsto \dfrac{1}{\pi}$ et $v_2' : t \longmapsto \sin(kt)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(kt)\, dt &= \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{-\cos(kt)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{\pi}\frac{-\cos(kt)}{k} \\
&= 0 - \left(\frac{0}{\pi} - 1\right)\frac{-\cos(0)}{k} + \frac{1}{k\pi}\int_0^\pi \cos(kt)\, dt \\
&= -\frac{1}{k} + \frac{1}{k\pi}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = -\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Finalement on a bien $\boxed{\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\, dt = -\frac{1}{k}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(kt)\, dt = \frac{1}{k^2}.}$

2) Soient $t \in]0,\pi]$. On remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right)$. Comme $e^{it} \neq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{it}\right)^k = \frac{1-\left(e^{it}\right)^{n+1}}{1-e^{it}} = \frac{e^{i(n+1)t/2}\left(e^{-i(n+1)t/2} - e^{i(n+1)t}\right)}{e^{it/2}\left(e^{-it/2} - e^{it/2}\right)} = e^{int/2}\frac{-2i\sin\left(\dfrac{(n+1)t}{2}\right)}{-2i\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$$

et donc, en passant à la partie réelle,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \frac{\cos\left(\dfrac{nt}{2}\right)\sin\left(\dfrac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.}$$

3) On a

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{nt}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{nt}{2}+\frac{(n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{nt}{2}-\frac{(n+1)t}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = -1 + \sum_{k=0}^{n} \cos(kt) &= -1 + \frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi_n\left(\frac{t}{2}\right).\end{aligned}$$

Si enfin $t = 0$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2n+1) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi_n\left(\frac{t}{2}\right).$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } t \in [0,\pi],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi_n\left(\frac{t}{2}\right)}$

4) *Méthode 1 :* La fonction φ_n est continue sur $]0,\pi/2]$ comme quotient de deux fonctions continues sur $]0,\pi/2]$ telles que le dénominateur ne n'annule pas sur $]0,\pi/2]$.

Ensuite, si $t \in]0,\pi/2]$,

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)t} \times (2n+1) \times \frac{t}{\sin(t)}.$$

Or $\dfrac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ donc $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{t}{\sin(t)} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1$. Ainsi

$$\varphi_n(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 1 \times (2n+1) \times 1 = 2n+1 = \varphi_n(0).$$

Ainsi φ_n est continue (à droite) en 0. Nous en déduisons que $\boxed{\varphi_n \text{ est continue sur } [0,\pi/2].}$

Méthode 2 : Pour tout $t \in [0,\pi/2]$,

$$\varphi_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt).$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction $t \longmapsto \cos(2kt)$ est continue sur $[0, \pi/2]$. Ainsi $\boxed{\varphi_n \text{ est continue sur } [0, \pi/2]}$ en tant que somme de fonctions continues sur $[0, \pi/2]$.

5) Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt)\, dt &= \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\, dt \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \varphi_n \left(\frac{t}{2} \right) \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{1}{2} \varphi_n \left(\frac{t}{2} \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{1}{2} \varphi_n \left(\frac{t}{2} \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi^3}{6\pi} - \frac{\pi^2}{2} - 0 \right) + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{1}{2} \varphi_n \left(\frac{t}{2} \right) dt\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{1}{2} \varphi_n \left(\frac{t}{2} \right) dt.}$$

6) Faisons le changement de variable $x = \dfrac{t}{2}$ avec $t \longmapsto \dfrac{t}{2}$ de classe C^1 sur $[0, \pi]$ ($x = \pi/2$ quand $t = \pi$ et $x = 0$ quand $t = 0$). On a « $dx = \frac{1}{2}\, dx$ » :

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \varphi_n \left(\frac{t}{2} \right) \frac{dt}{2} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{(2x)^2}{2\pi} - 2x \right) \varphi_n (x)\ dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x(x - \pi) \varphi_n(x)\, dx.$$

On a bien

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x(x - \pi) \varphi_n(x)\, dx.}$$

Partie B : Étude de la régularité de f

1) Déjà f est continue sur $]0, \pi/2]$ comme quotient de deux fonctions continues telles que celle au dénominateur ne s'annule pas sur $]0, \pi/2]$. De plus $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et $x - \pi \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\pi$ donc

$$f(x) = \frac{x - \pi}{\frac{\sin(x)}{x}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\pi.$$

$\boxed{\text{On prolonge alors } f \text{ en } 0 \text{ en posant } f(0) = -\pi \text{ et } f \text{ est alors continue sur le segment } [0, \pi/2].}$

2) f est de classe C^1 sur $]0, \pi/2]$ comme quotient de deux fonctions de classe C^1 telles que celle au dénominateur ne s'annule pas sur $]0, \pi/2]$. Si $x \in]0, \pi/2]$,

$$f'(x) = \frac{2x - \pi}{\sin(x)} - \frac{x(x - \pi)\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{2x}{\sin(x)} - \frac{x^2 \cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{\pi}{\sin(x)} + \frac{x\pi \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

et donc

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x}{\sin(x)} - \frac{x^2 \cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{\pi x^2}{\sin^2(x)} \left(\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2} \right).}$$

3) • Posons $\varphi : x \in [0, \pi/2] \longmapsto \sin(x) - x\cos(x)$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $[0, \pi/2]$ et, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $\varphi'(x) = \cos(x) - \cos(x) + x\sin(x) = x\sin(x) \geqslant 0$. Ainsi elle est croissante sur $[0, \pi/2]$ et donc

$$\boxed{\forall x \in [0, \pi/2], \qquad \sin(x) - x\cos(x) = \varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0.}$$

- Posons $\psi : x \in [0, \pi/2] \longmapsto \sin(x) - x\cos(x) - \dfrac{x^3}{3}$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $[0, \pi/2]$ et, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $\psi'(x) = \cos(x) - \cos(x) + x\sin(x) - x^2 = x(\sin(x) - x) \leqslant 0$. Ainsi elle est décroissante sur $[0, \pi/2]$ et donc

$$\boxed{\forall x \in [0, \pi/2], \qquad \sin(x) - x\cos(x) - \frac{x^3}{3} = \psi(x) \leqslant \psi(0) = 0.}$$

4) Il s'ensuit que

$$\forall x \in]0, \pi/2], \qquad 0 \leqslant \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2} \leqslant \frac{x^3}{3x^2} = \frac{x}{3}.$$

Par encadrement, nous en déduisons que $\boxed{\dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0.}$

De plus $\dfrac{x}{\sin(x)} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et $\cos(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$ par continuité de $\cos$ en 0. Ainsi

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x}{\sin(x)} - \frac{x^2\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{\pi x^2}{\sin^2(x)}\left(\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2}\right) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 2 - 1 - \pi \times 0 = 1}$$

5) La fonction f est continue sur $[0, \pi/2]$, dérivable sur $]0, \pi/2]$ et $f'(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$. Le théorème de prolongement de la dérivée entraîne alors que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$. Enfin f' est continue sur $]0, \pi/2]$ et $f'(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1 = f'(0)$ donc f' est continue en 0. Il s'ensuit que $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur le segment } [0, \pi/2].}$

Partie C : Convergence de $(S_n)_{n \geqslant 1}$ vers $\zeta(2)$

1) Si $x \in]0, \pi/2]$, on a

$$x(x - \pi)\varphi_n(x) = x(x - \pi)\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} = f(x)\sin((2n+1)x).$$

Et si $x = 0$, $x(x - \pi)\varphi_n(x) = 0 = f(0)\sin((2n+1)x)$. Ainsi

$$\boxed{\forall x \in [0, \pi/2], \qquad x(x - \pi)\varphi_n(x) = f(x)\sin((2n+1)x).}$$

2) Faisons une intégration par parties avec les fonctions $x \longmapsto \dfrac{-\cos((2n+1)x)}{2n+1}$ et f de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} x(x - \pi)\varphi_n(x)\,dx &= \int_0^{\pi/2} f(x)\sin((2n+1)x)\,dx \\
&= \left[-f(x)\frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} f'(x)\frac{-\cos((2n+1)x)}{2n+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2n+1}\left(- f(\pi/2)\underbrace{\cos((2n+1)\pi/2)}_{=0} + f(0)\cos(0) + \int_0^{\pi/2} f'(x)\cos((2n+1)x)\,dx\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{2n+1}\left(-\pi + \int_0^{\pi/2} f'(x)\cos((2n+1)x)\,dx\right)}
\end{aligned}$$

3) La fonction f est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$ donc, en particulier, f' est continue sur le segment $[0, \pi/2]$. Le théorème des bornes atteintes entraîne alors que $\boxed{f' \text{ est bornée sur } [0, \pi/2].}$ Notons M le maximum de $|f'|$ sur $[0, \pi/2]$. On a alors, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $|f'(x)\cos((2n+1)x)| \leqslant |f'(x)| \leqslant M$.

Par inégalité triangulaire et par propriété de croissance de l'intégrale, on a alors

$$\boxed{\left|\int_0^{\pi/2} f'(x)\cos((2n+1)x)\,dx\right| \leqslant \int_0^{\pi/2} |f'(x)\cos((2n+1)x)|\,dx \leqslant \int_0^{\pi/2} M\,dt = \frac{\pi}{2}M.}$$

4) L'inégalité triangulaire entraîne que

$$\left|\int_0^{\pi/2} x(x-\pi)\varphi_n(x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{2n+1}\left(\pi + \frac{\pi}{2}M\right).$$

Puisque $2n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, le théorème d'encadrement entraîne que

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} x(x-\pi)\varphi_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

D'où

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x(x-\pi)\varphi_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}.}$$

Exercice 3 : Calcul de $\zeta(2)$ à l'aide de polynômes

D'après un exercice d'oral HEC 2014.

1) a) Soit $x \in]0, \pi/2]$. On a

$$\boxed{\frac{\operatorname{cotan}(x)+i}{\operatorname{cotan}(x)-i} = \frac{\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}+i}{\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}-i} = \frac{\cos(x)+i\sin(x)}{\cos(x)-i\sin(x)} = \frac{e^{ix}}{e^{-ix}} = e^{2ix}.}$$

b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a, d'après la formule de Moivre,

$$\left(\frac{\operatorname{cotan}(x_k)+i}{\operatorname{cotan}(x_k)-i}\right)^{2n+1} = \left(e^{2ix_k}\right)^{2n+1} = e^{2(2n+1)ix_k} = e^{2ik\pi} = 1.$$

Nous en déduisons que $(\operatorname{cotan}(x_k)+i)^{2n+1} = (\operatorname{cotan}(x_k)-i)^{2n+1} = \overline{(\operatorname{cotan}(x_k)+i)^{2n+1}}$ si bien que $\boxed{(\operatorname{cotan}(x_k)+i)^{2n+1} \in \mathbb{R}.}$

2) a) Le changement d'indice $\ell = n-k$, donne $P_n(X) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \binom{2n+1}{2(n-\ell)+1}(-1)^{n-\ell}X^{\ell}$. Ainsi

- $\boxed{P_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } \binom{2n+1}{2(n-n)+1}(-1)^{n-n} = \binom{2n+1}{1} = (2n+1).}$
- Le coefficient d'indice $\deg(P)-1 = n-1$ est

$$\boxed{\binom{2n+1}{2(n-n+1)+1}(-1)^{n-(n-1)} = -\binom{2n+1}{3} = -\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{3!} = -\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}.}$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$. La formule du binôme de Newton entraîne que

$$\mathfrak{Im}\left((t+i)^{2n+1}\right) = \mathfrak{Im}\left(\sum_{p=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{p} i^p t^{2n+1-p}\right) = \sum_{p=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{p}\mathfrak{Im}(i^p)t^{2n+1-p}.$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathfrak{Im}(i^{2k}) = \mathfrak{Im}((-1)^k) = 0$ et $\mathfrak{Im}(i^{2k+1}) = \mathfrak{Im}((-1)^k) = (-1)^k$. Par conséquent

$$\boxed{\mathfrak{Im}\left((t+i)^{2n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k t^{2n+1-(2k+1)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k t^{2(n-k)} = P_n(t^2).}$$

c) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a alors

$$P_n(\alpha_k) = P_n\left((\mathrm{cotan}(x_k))^2\right) = \mathfrak{Im}\left((\mathrm{cotan}(x_k)+i)^{2n+1}\right) = 0$$

puisque $(\mathrm{cotan}(x_k)+i)^{2n+1} \in \mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{\alpha_k \text{ est racine de } P_n.}$

d) Soit $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $\alpha_k = \alpha_\ell$. Puisque cotan est positive sur $]0,\pi/2]$, on a alors $\dfrac{\cos(x_k)}{\sin(x_k)} = \dfrac{\cos(x_\ell)}{\sin(x_\ell)}$ donc $\cos(x_k)\sin(x_\ell) = \sin(x_k)\cos(x_\ell)$ et donc

$$\sin(x_k - x_\ell) = \sin(x_k)\cos(x_\ell) - \cos(x_k)\sin(x_\ell) = 0.$$

Puisque $x_k - x_\ell = \dfrac{(k-\ell)\pi}{2n+1} \in]-\pi/2,\pi/2[$, nous en déduisons que $x_k - x_\ell = 0$ et donc que $k = \ell$. Ainsi $\boxed{\text{les } \alpha_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n \text{ sont tous distincts.}}$

e) Le polynôme P_n est de degré n, admet $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ pour n racines distinctes et son coefficient dominant est $2n+1$ si bien que

$$\boxed{P_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k).}$$

3) Le coefficient dominant de P_n est $a_n = 2n+1$ et son coefficient d'indice $n-1$ est $a_{n-1} = -\dfrac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$. Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{cotan}^2(x_k) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{-(2n+1)n(2n-1)}{3(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}.}$$

4) Soit $u \in]0,\pi/2]$. On a $0 < \sin(u) \leqslant u$ donc $0 < \sin^2(u) \leqslant u^2$ et, comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\boxed{\dfrac{1}{u^2} \leqslant \dfrac{1}{\sin^2(u)} = \dfrac{\sin^2(u)+\cos^2(u)}{\sin^2(u)} = 1+\mathrm{cotan}^2(u).}$

On a aussi $0 < u\cos(u) \leqslant \sin(u)$ donc $0 < u^2\cos^2(u) \leqslant \sin^2(u)$ et donc $\boxed{\mathrm{cotan}^2(u) = \dfrac{\cos^2(u)}{\sin^2(u)} \leqslant \dfrac{1}{u^2}.}$

5) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a donc

$$\mathrm{cotan}^2(x_k) \leqslant \frac{1}{x_k^2} \leqslant 1+\mathrm{cotan}^2(x_k).$$

On somme :

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{cotan}^2(x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2} \leqslant n + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{cotan}^2(x_k)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant n + \frac{n(2n-1)}{3}.}$$

En divisant par $(2n+1)^2/\pi^2$, on obtient

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2\pi^2} \leqslant \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} + \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2}.$$

On a $\dfrac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{6} \times \dfrac{4n^2-2n}{4n^2+4n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^2}{6}$ et $\dfrac{n\pi^2}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc, par encadrement,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}.}$$