Devoir surveillé n° 4

samedi 26 janvier 2019

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Le devoir est volontairement long et il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet. Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

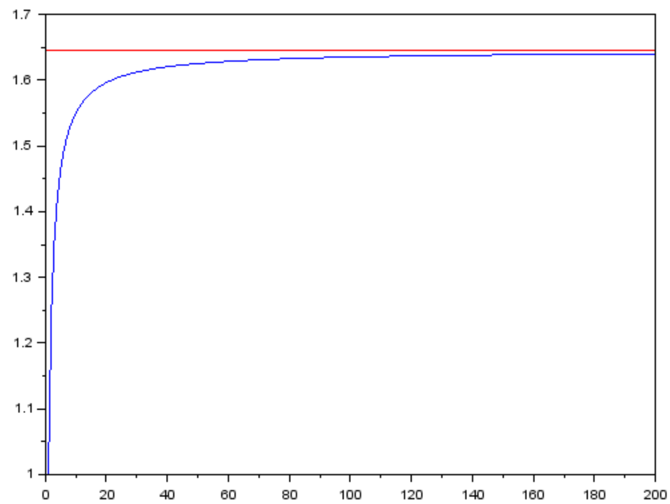
Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. Encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.

Exercice 1 : Questions en vrac (le retour)

1) Déterminer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt[5]{1-x^2}}$ sur un intervalle à préciser.
2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$.
3) A l'aide du changement de variable $t = \ln(u)$, déterminer une primitive de $t \longmapsto \dfrac{1}{7+e^{-t}}$ sur $\mathbb{R}$.
4) Factoriser le polynôme $P = X^4 - 3X^3 + 8X^2 - 7X + 5$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
   On pourra commencer par vérifier que $-j = e^{-i\pi/3}$ est une racine de P et en déduire une autre racine complexe.
5) Montrer qu'un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est une application surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré n tel que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(k) = k^n$.
7) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Écrire une **fonction** Scilab, appelée `Riemann2`, qui prend en argument un entier naturel non nul N et qui renvoie la liste des N premières valeurs de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.

La commande `plot(1:200,Riemann2(200),'b')` représente alors graphiquement en bleu les 200 premières valeurs de la suite. La commande `plot([0,200],%pi∧2/6*[1,1],'r')` superpose en rouge la droite d'équation $y = \pi^2/6$. On obtient la figure ci-contre :



Le but des deux exercices suivants est de montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, avec des méthodes différentes (utilisant des intégrales dans l'exercice 2 et des polynômes dans l'exercice 3).

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie A : Écriture de S_n à l'aide d'intégrales

1) Vérifier que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\, dt = \frac{1}{k^2}.$$

2) a) Montrer (sans utiliser de raisonnement par récurrence) que
$$\forall t \in]0, \pi], \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \frac{\cos\left(\frac{nt}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

   b) En déduire que, pour tout $t \in [0, \pi]$,
$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi_n\left(\frac{t}{2}\right), \qquad \text{avec} \qquad \varphi_n(t) = \begin{cases} 2n+1 & \text{si} \quad t = 0 \\ \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} & \text{si} \quad t \in]0, \pi/2]. \end{cases}$$

3) Justifier que φ_n est continue sur $[0, \pi/2]$.

4) En utilisant les questions 1 et 2b, montrer alors que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{1}{2}\varphi_n\left(\frac{t}{2}\right)\, dt.$$

5) En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x(x-\pi)\varphi_n(x)\, dx.$$

Partie B : Étude de la régularité de f

Introduisons alors la fonction $f : x \in]0, \pi/2] \longmapsto \dfrac{x(x-\pi)}{\sin(x)}$.

1) Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur le segment $[0, \pi/2]$. On note toujours f la fonction ainsi prolongée.

2) Justifier que f est de classe C^1 sur $]0, \pi/2]$ et vérifier que
$$\forall x \in]0, \pi/2], \qquad f'(x) = \frac{2x}{\sin(x)} - \frac{x^2\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{\pi x^2}{\sin^2(x)} \left(\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2}\right).$$

3) A l'aide de (brèves) études de fonctions, montrer que

   - pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $\sin(x) - x\cos(x) \geqslant 0$,
   - pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $\sin(x) - x\cos(x) - \dfrac{x^3}{3} \leqslant 0$.

   On pourra utiliser (sans le redémontrer) le fait que $\sin(x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

4) Montrer alors que $\dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ puis que $f'(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$.

5) En déduire que f est de classe C^1 sur le segment $[0, \pi/2]$.

Partie C : Convergence de $(S_n)_{n\geqslant 1}$ vers $\pi^2/6$

1) Vérifier que
$$\forall x \in [0,\pi/2], \qquad x(x-\pi)\varphi_n(x) = f(x)\sin((2n+1)x).$$

2) A l'aide d'une intégration par parties, montrer alors que
$$\int_0^{\pi/2} x(x-\pi)\varphi_n(x)\,dx = \frac{1}{2n+1}\left(-\pi + \int_0^{\pi/2} f'(x)\cos((2n+1)x)\,dx\right).$$

3) Justifier (sans faire d'étude de fonction) que f' est bornée sur $[0,\pi/2]$ puis montrer que
$$\left|\int_0^{\pi/2} f'(x)\cos((2n+1)x)\,dx\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\sup_{[0,\pi/2]}|f'|.$$

4) Conclure que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x(x-\pi)\varphi_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 3 : Calcul de $\zeta(2)$ à l'aide de polynômes

Fixons $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $x_k = \dfrac{k\pi}{2n+1}$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$. On définit la fonction cotangente, notée cotan, par
$$\forall x\in\,]0,\pi/2], \qquad \mathrm{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

1) a) Montrer que, pour tout $x\in\,]0,\pi/2]$, $e^{2ix} = \dfrac{\mathrm{cotan}(x)+i}{\mathrm{cotan}(x)-i}$.

   b) En déduire que, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $(\mathrm{cotan}(x_k)+i)^{2n+1}$ est un nombre réel.

2) On définit le polynôme $P_n\in\mathbb{R}[X]$ par
$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k X^{n-k}.$$

   a) Préciser le degré de P_n, son coefficient dominant et le coefficient d'indice $\deg(P)-1$.

   b) Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\mathfrak{Im}\left((t+i)^{2n+1}\right) = P_n(t^2)$.

   c) En déduire que, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\alpha_k = \mathrm{cotan}^2(x_k)$ est une racine de P_n.

   d) Justifier que les α_k, $1\leqslant k\leqslant n$ sont tous distincts.

   e) Donner alors une factorisation de P_n sous forme d'un produit de polynômes de degré 1.

3) En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{cotan}^2(x_k) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

   On utilisera (en l'admettant – cela se prouve par récurrence) le fait que, si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ *est de degré* $p\in\mathbb{N}^*$ *et admet* p *racines complexes distinctes, alors la somme des racines est égale à* $-\dfrac{a_{p-1}}{a_p}$.

4) En utilisant la question B3 de l'exercice précédent, montrer que
$$\forall u\in\,]0,\pi/2], \qquad \mathrm{cotan}^2(u) \leqslant \frac{1}{u^2} \leqslant 1+\mathrm{cotan}^2(u).$$

5) En déduire que
$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leqslant n + \frac{n(2n-1)}{3}.$$

   puis que
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}.$$