Correction du DS n° 3

Exercice 1 : Questions en vrac

1) C'est dans le cours !

2) a) Notons T l'ensemble des mains avec exactement cinq trèfles et A l'ensemble des mains avec exactement deux as. Notons B l'ensemble des mains avec l'as de trèfle. On a $\mathrm{card}(A\cap T) = \mathrm{card}(A\cap T\cap B) + \mathrm{card}(A\cap T\cap \overline{B})$ puisque les événements sont disjoints.

- Pour obtenir une main avec exactement cinq trèfles et deux as dont l'as de trèfle, on prend d'abord l'as de trèfle, puis on choisit les quatre autres trèfles parmi les 12 n'étant pas un as (il y a $\binom{12}{4}$ choix), puis un autre as (il y a 3 choix) et enfin on choisit 4 cartes parmi les 36 cartes n'étant ni des trèfles ni des as (il y a $\binom{36}{4}$ choix). Ainsi

$$\mathrm{card}(A\cap T\cap B) = 1\times\binom{12}{4}\times 3\times\binom{36}{4}.$$

- Pour obtenir une main avec exactement cinq trèfles et deux as mais pas l'as de trèfle, on choisit les cinq trèfles parmi les 12 n'étant pas l'as de trèfle (il y a $\binom{12}{5}$ choix), puis deux as n'étant pas un trèfle (il y a $\binom{3}{2}=3$ choix) et enfin on choisit 3 cartes parmi les 36 cartes n'étant ni des trèfles ni des as (il y a $\binom{36}{3}$ choix). Ainsi

$$\mathrm{card}(A\cap T\cap B) = \binom{12}{5}\times 3\times\binom{36}{3}.$$

Il y a donc

$$\mathrm{card}(A\cap T) = \boxed{3\binom{12}{4}\binom{36}{4}+3\binom{12}{5}\binom{36}{3}}$$

telles mains.

b) La formule de Poincaré entraîne alors que $\mathrm{card}(A\cup T)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(T)-\mathrm{card}(A\cap T)$. Or

- $\mathrm{card}(T)=\binom{13}{5}\binom{39}{5}$ puisqu'il s'agit de choisir 5 cartes parmi les trèfles et 5 cartes parmi les autres.
- $\mathrm{card}(A)=\binom{4}{2}\binom{48}{8}$ puisqu'il s'agit de choisir 2 cartes parmi les as et 8 cartes parmi les autres.

Ainsi il y a

$$\mathrm{card}(A\cup T) = \boxed{\binom{13}{5}\binom{39}{5}+\binom{4}{2}\binom{48}{8}-3\binom{12}{4}\binom{36}{4}-3\binom{12}{5}\binom{36}{3}}$$

telles mains.

c) Pour construire un tel mot :

- On choisit d'abord les 6 premières lettres, qui sont forcément distinctes, sans ordre (il y a $\binom{26}{6}$ choix).
- On range ces lettres dans l'ordre alphabétique (il n'y a qu'une façon de le faire).
- On choisit un anagramme de DENOMBREMENT que l'on place ensuite dans le mot :
  — On choisit les places des lettres E (il y a $\binom{12}{3}$ possibilités),
  — puis les places des lettres N parmi les 9 restantes (il y a $\binom{9}{2}$ possibilités),
  — puis les places des lettres M parmi les 7 restantes (il y a $\binom{7}{2}$ possibilités),
  — puis on place les lettres D, O, B, R et T (il y a $5!$ possibilités).
- Enfin on choisit les deux dernières lettres (il y a 26^2 choix).

Il s'ensuit qu'il y a

$$\boxed{\binom{26}{6} \times 1 \times \binom{12}{3} \times \binom{9}{2} \times \binom{7}{2} \times 5! \times 26^2.}$$

tels mots.

Exercice 2 : Une stratégie pour arriver en retard moins souvent ?

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) = \dfrac{1}{2}$ et la probabilité de prendre le bus 53 (resp. 94) les $n-1$ jours suivants est $(1-\alpha)^{n-1}$ (resp. $(1-\beta)^{n-1}$). Plus rigoureusement, on a $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \subset A_n$. Puisque $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$ (ce qui s'obtient par récurrence immédiate), la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(A_n) \geqslant \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_k}(A_{k+1}) = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n-1} (1-\alpha),$$

et donc $\boxed{\mathbb{P}(A_n) \geqslant \dfrac{(1-\alpha)^{n-1}}{2}.}$

⚠ *Les événements $A_1, \ldots, A_n$ ne sont pas mutuellement indépendants donc l'utilisation de la formule des probabilité composée est requise. On peut néanmoins utiliser de l'indépendance en procédant légèrement différemment. : pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons H_k l'événement « Le bus 53 est à l'heure le $n^{\text{ième}}$ jour ». On a $A_1 \cap H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_{n-1} \subset A_n$. Cette fois $A_1, H_1, \ldots, H_n$ sont mutuellement indépendants donc*

$$\mathbb{P}(A_n) \geqslant \mathbb{P}(A_1 \cap H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_n) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(H_k) = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n-1} (1-\alpha) = \frac{1}{2}(1-\alpha)^{n-1}.$$

De même $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n} \subset \overline{A_n}$ et $\mathbb{P}\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n} \subset \overline{A_n})$ donc

$$\mathbb{P}(\overline{A_n}) \geqslant \mathbb{P}(\overline{A_1}) \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_k}}(\overline{A_{k+1}}) = \frac{1}{2} \prod_{k=1}^{n-1} (1-\beta),$$

et donc $\boxed{\mathbb{P}(\overline{A_n}) \geqslant \dfrac{(1-\beta)^{n-1}}{2}.}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A_n, \overline{A_n})$ de probabilités non nulles (c'est le cas d'après la question précédente), on a :

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1})\mathbb{P}(\overline{A_n}) = (1-\alpha)\, a_n + \beta(1-a_n)$$

et donc $\boxed{a_{n+1} = (1-\alpha-\beta)a_n + \beta.}$

3) Posons $x = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$ de telle sorte que $x = (1-\alpha-\beta)x + \beta$ (possible puisque $\alpha+\beta \neq 0$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = a_n - x$ de telle sorte que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit une suite géométrique de raison $1-\alpha-\beta$. Nous en déduisons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = u_n + x = (1-\alpha-\beta)^{n-1} u_1 + x = (1-\alpha-\beta)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - x\right) + x.$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \frac{\alpha-\beta}{2(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta-1)^{n-1} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}.}$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons B_n l'événement « le bus emprunté le $n^{\text{ième}}$ jour est à l'heure ». En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A_n, \overline{A_n})$ de probabilités non nulles, on a :

$$\begin{aligned}p_n = \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}_{A_n}(B_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{\overline{A_n}}(B_n)\mathbb{P}(\overline{A_n}) &= (1-\alpha)\,a_n + (1-\beta)(1-a_n)\\ &= (\beta-\alpha)a_n + 1 - \beta\\ &= -\frac{(\alpha-\beta)^2}{2(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta-1)^{n-1} + \frac{(\beta-\alpha)\beta}{\alpha+\beta} + 1 - \beta.\end{aligned}$$

Or

$$\frac{(\beta-\alpha)\beta}{\alpha+\beta} + 1 - \beta = \frac{\beta^2 - \alpha\beta + \alpha - \alpha\beta + \beta - \beta^2}{\alpha+\beta} = 1 - \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = -\frac{(\alpha-\beta)^2}{2(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta-1)^{n-1} + 1 - \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}.}$$

5) Puisque $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$, on a $-1 < \alpha + \beta - 1 < 1$ et donc $(\alpha+\beta-1)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi

$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } p = 1 - \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}.}$

6) On a $p - (1-\alpha) = \alpha - \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \dfrac{\alpha(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}$ et $p - (1-\beta) = \beta - \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \dfrac{\beta(\beta-\alpha)}{\alpha+\beta}$. Ainsi

- Si $1-\alpha < 1-\beta$, alors $\alpha > \beta$ et donc $1-\alpha < p < 1-\beta$.
- Si $1-\alpha \geqslant 1-\beta$, alors $\alpha \leqslant \beta$ et donc $1-\beta \leqslant p \leqslant 1-\alpha$.

Ainsi $\boxed{\min(1-\alpha, 1-\beta) \leqslant p \leqslant \max(1-\alpha, 1-\beta)}$. Lorsqu'on répète cette stratégie sur un très grand nombre de jours, la probabilité d'être à l'heure est environ p. Cette probabilité est inférieure à la probabilité d'arriver à l'heure si on avait choisi de prendre tous les jours le bus le plus ponctuel (ce qui est attendu) mais elle est supérieure à la probabilité d'arriver à l'heure si on avait choisi de prendre tous les jours le bus le moins ponctuel.

7) On cherche $\mathbb{P}_{A_N}(A_{N-1})$. D'après la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}_{A_N}(A_{N-1}) = \frac{\mathbb{P}_{A_{N-1}}(A_N)\mathbb{P}(A_{N-1})}{\mathbb{P}(A_N)} = \frac{(1-\alpha)a_{N-1}}{a_N}.$$

Or $a_N = (1-\alpha-\beta)a_{N-1} + \beta$ donc $a_N - \beta = (1-\alpha-\beta)a_{N-1}$.

- Si $\alpha+\beta \neq 1$, alors $a_{N-1} = \dfrac{a_N - \beta}{1-\alpha-\beta}$ et donc

$$\boxed{\mathbb{P}_{A_N}(A_{N-1}) = \frac{(1-\alpha)(a_N-\beta)}{a_N(1-\alpha-\beta)}.}$$

- Si $\alpha+\beta = 1$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 0 + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} = \beta$ et donc $\boxed{\mathbb{P}_{A_N}(A_{N-1}) = 1-\alpha.}$

Exercice 3 : Étude d'une urne incomplète

1) L'urne incomplète peut être vide si on n'a obtenu que des Piles ou que des Faces. Au maximum elle peut contenir $n-1$ boules si à l'issue du $(2n-2)^{\text{ième}}$ lancer chaque urne contient $n-1$ boules. Pour tout $k \in [\![1, n-2]\!]$, l'urne incomplète contient k boules si par exemple on obtient k fois Piles puis $2n-1-k$ faces. Ainsi $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!].}$

2) Si $n = 1$, on lance une seule boule. L'urne incomplète ne contient donc aucune boule. Ainsi

$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1,\ \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{V}(X_1) = 0.}$

3) a) On a

- $[X_2 = 0] = (A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$,
- $[X_2 = 1] = (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$,

b) Les événements $A_1 \cap A_2$ et $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ sont incompatibles donc $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$. Par indépendance mutuelle, on obtient :

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{A_2}) = p^2 + (1-p)^2.$$

De même

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(\overline{A_2})\mathbb{P}(\overline{A_3}) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(\overline{A_2})\mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(\overline{A_3}) + \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)\\ &= p(1-p)(1-p) + p(1-p)p + (1-p)p(1-p) + (1-p)pp\\ &= 2p^2(1-p) + 2p(1-p)^2 = 2p(1-p)(p+1-p) = 2p(1-p).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\boxed{X_2 \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } 2p(1-p).}$

c) Il s'ensuit que $\boxed{\mathbb{E}(X_2) = 2p(1-p) \text{ et } \mathbb{V}(X_2) = 2p(1-p)(1-2p(1-p)).}$

4) Donnons-nous $k \in X_n(\Omega)$.

a) Les $n-1+k$ premiers lancers sont indépendants, identiques et il y a deux issues : obtenir Pile (succès) ou Face (échec). Il s'agit donc d'un schéma binomial de paramètres $n-1+k$ et p.

- L'événement $B_{n,k}$ peut donc se réécrire « obtenir $n-1$ succès au cours de ce schéma binomial ». Ainsi

$$\mathbb{P}(B_{n,k}) = \binom{n-1+k}{n-1} p^{n-1}(1-p)^{(n-1+k)-(n-1)} = \boxed{\binom{n-1+k}{k} p^{n-1}(1-p)^k}.$$

- L'événement $C_{n,k}$ peut donc se réécrire « obtenir k succès au cours de ce schéma binomial ». Ainsi

$$\mathbb{P}(B_{n,k}) = \binom{n-1+k}{k} p^k(1-p)^{(n-1+k)-k} = \boxed{\binom{n-1+k}{k} p^k(1-p)^{n-1}}.$$

b) On a $[X_n = k] = (B_{n,k} \cap A_{n+k}) \cup (C_{n,k} \cap \overline{A_{n+k}})$.

c) Par incompatibilité puis par indépendance, nous obtenons donc

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(B_{n,k} \cap A_{n+k}) + \mathbb{P}(C_{n,k} \cap \overline{A_{n+k}}) = \mathbb{P}(B_{n,k})\mathbb{P}(A_{n+k}) + \mathbb{P}(C_{n,k})\mathbb{P}(\overline{A_{n+k}})$$

et donc

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n-1+k}{k} p^n(1-p)^k + \binom{n-1+k}{k} p^k(1-p)^n\\ &= \binom{n-1+k}{k}\Big(p^n(1-p)^k + p^k(1-p)^n\Big).\end{aligned}}$$

5) a) Puisque $p = \dfrac{1}{2}$, pour tout $k \in X_n(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n-1+k}{k}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{2}{2^{n+k}}\binom{n+k-1}{k}$$

et donc $\boxed{\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{1}{2^{n+k-1}}\dbinom{n+k-1}{k}}$.

b) Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. On a $\dfrac{n+k}{k+1}\dbinom{n+k-1}{k} = \dbinom{n+k}{k+1}$ si bien que

$$\boxed{2(k+1)\mathbb{P}(X_n = k+1) = \frac{2(k+1)}{2^{n+k-1}}\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k)}{2^{n+k}}\binom{n+k}{k+1} = (n+k)\mathbb{P}(X_n = k).}$$

6) On somme cette relation :

$$\sum_{k=0}^{n-2} 2(k+1)\mathbb{P}(X_n = k+1) = \sum_{k=0}^{n-2} (n+k)\mathbb{P}(X_n = k).$$

Faisons le changement d'indice $j = k+1$ dans la somme de gauche :

$$\sum_{k=0}^{n-2} 2(k+1)\mathbb{P}(X_n = k+1) = 2\sum_{j=1}^{n-1} j\mathbb{P}(X_n = j) = 2\sum_{j=0}^{n-1} j\mathbb{P}(X_n = j) = 2\mathbb{E}(X_n),$$

puisque le premier terme de la somme est nul. Ensuite, par linéarité :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-2}(n+k)\mathbb{P}(X_n = k) &= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\mathbb{P}(X_n = k) - (n+n-1)\mathbb{P}(X_n = n-1)\\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X_n = k) + \sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(X_n = k) - (2n-1)\mathbb{P}(X_n = n-1)\\ &= n \times 1 + \mathbb{E}(X_n) - (2n-1)\mathbb{P}(X_n = n-1).\end{aligned}$$

Ainsi $2\mathbb{E}(X_n) = n + \mathbb{E}(X_n) - (2n-1)\mathbb{P}(X_n = n-1)$ et donc $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = n - (2n-1)\mathbb{P}(X_n = n-1).}$

7) a) Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$. On a $2(k+1)^2\mathbb{P}(X_n = k+1) = (k+1)(n+k)\mathbb{P}(X_n = k)$ donc

$$\boxed{2(k+1)^2\mathbb{P}(X_n = k+1) = k^2\mathbb{P}(X_n = k) + (n+1)k\mathbb{P}(X_n = k) + n\mathbb{P}(X_n = k).}$$

b) On somme cette relation :

$$2\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)^2\mathbb{P}(X_n = k+1) = \sum_{k=0}^{n-2} k^2\mathbb{P}(X_n = k) + (n+1)\sum_{k=0}^{n-2} k\mathbb{P}(X_n = k) + n\sum_{k=0}^{n-2}\mathbb{P}(X_n = k).$$

Calculons ces quatre sommes séparément :

- En faisant le changement d'indice $j = k+1$ et en appliquant la formule de transfert, nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)^2\mathbb{P}(X_n = k+1) = \sum_{j=1}^{n-1} j^2\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{j=1}^{n-1} j^2\mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{E}(X_n^2).$$

- D'après la formule de transfert,

$$\sum_{k=0}^{n-2} k^2\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2\mathbb{P}(X_n = k) - (n-1)^2\mathbb{P}(X_n = n-1) = \mathbb{E}(X_n^2) - (n-1)^2\mathbb{P}(X_n = n-1).$$

- On a

$$\sum_{k=0}^{n-2} k\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(X_n = k) - (n-1)\mathbb{P}(X_n = n-1) = \mathbb{E}(X_n) - (n-1)\mathbb{P}(X_n = n-1).$$

- Enfin $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2}\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X_n = n-1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = n-1)$.

Ainsi

$$\begin{aligned}2\mathbb{E}(X_n^2) &= \mathbb{E}(X_n^2) - (n-1)^2\mathbb{P}(X_n = n-1)\\ &\qquad + (n+1)\Big(\mathbb{E}(X_n) - (n-1)\mathbb{P}(X_n = n-1)\Big) + n\Big(1 - \mathbb{P}(X_n = n-1)\Big)\\ &= \mathbb{E}(X_n^2) + n - ((n-1)^2 + (n+1)(n-1) + n)\mathbb{P}(X_n = n-1) + (n+1)\mathbb{E}(X_n)\\ &= \mathbb{E}(X_n^2) + n - n(2n-1)\mathbb{P}(X_n = n-1) + (n+1)\mathbb{E}(X_n)\end{aligned}$$

donc $\mathbb{E}(X_n^2) = n - n(2n-1)\mathbb{P}(X_n = n-1) + (n+1)\mathbb{E}(X_n)$. Utilisons la formule de la question 6 :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n^2) = n - n\big(n - \mathbb{E}(X_n)\big) + (n+1)\mathbb{E}(X_n) = (2n+1)\mathbb{E}(X_n) - n(n-1).}$$

c) Ainsi
$$\boxed{\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = (2n+1)\mathbb{E}(X_n) - n(n-1) - \mathbb{E}(X_n)^2.}$$

8) a) D'après les formules des questions 5a et 6, on a
$$n - \mathbb{E}(X_n) = (2n-1)\mathbb{P}(X_n = n-1) = \frac{2n-1}{2^{n+n-1-1}}\binom{n+n-1-1}{n-1} = \frac{2n-1}{4^{n-1}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

De plus
$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{2k}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{2k} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{n-1}(2k)} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1)\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1}(2k)\right)}{\left(\prod_{k=1}^{n-1}(2k)\right)^2}.$$

Cet argument est classique. Au numérateur, nous avons le produit des entiers impairs de 1 à $2n-1$. On multiplie donc le numérateur et le dénominateur par le produit des entiers pairs de 2 à $2n-2$ pour faire apparaître au numérateur le produit de tous les entiers de 1 à $2n-1$, c'est-à-dire $(2n-1)!$. On remarque aussi que
$$\left(\prod_{k=1}^{n-1}(2k)\right)^2 \left(2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}k\right)^2 = (2^{n-1}(n-1)!)^2 = 4^{n-1}((n-1)!)^2.$$

Ainsi
$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{2k}\right) = \frac{(2n-1)!}{4^{n-1}((n-1)!)^2} = \frac{2n-1}{4^{n-1}}\binom{2n-2}{n-1}.$$

On retrouve bien $\boxed{n - \mathbb{E}(X_n) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{2k}\right).}$

b) Et voilà le programme en question :

```
n=input('Entrez un entier supérieur ou égal à 2 :')
x=1;
for   k=1:(n-1)
      x=x*(1+1/(2*k));
end
esp=n-x; var=(2*n+1)*esp-esp^2-n*(n-1);
disp('L''espérance de X'+string(n)+' est '+string(esp)+' et sa variance est '+string(var)+'.')
```

Exercice 4

1) Les N lancers sont des expériences de Bernoulli identiques et indépendants (car les pièces sont lancées simultanément) dont la probabilité de succès (obtenir Pile) est p. Il s'ensuit que $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(N,p).}$

2) On a $\boxed{G(\Omega) = [\![0,n]\!]}$ car au mieux les n pièces qu'il a choisi sont toutes tombées sur Pile et au pire toutes sur Face.

3) Soient $k \in [\![0,N]\!]$ et $j \in [\![0,k]\!]$.

a) Il y a $\boxed{\binom{N}{n} \text{ façons de choisir } n \text{ pièces parmi les } N \text{ pièces.}}$

b) Si on suppose que, parmi les N pièces, exactement k ont amené Pile, alors choisir n pièces parmi les N pièces dont exactement j représentent Pile revient

- à choisir d'abord j pièces parmi les k qui sont ont amené Pile ($\binom{k}{j}$ choix),
- à choisir ensuite les $n-j$ autres pièces parmi les $N-k$ qui ont amené Face ($\binom{N-k}{n-j}$ choix).

Ainsi $\boxed{\text{il y a } \binom{k}{j}\binom{N-k}{n-j} \text{ façons de choisir } n \text{ pièces parmi les } N \text{ dont exactement } j \text{ représentent Pile.}}$

c) Puisque les choix sont équiprobables, nous en déduisons que

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X=k]}(G=j) = \frac{\dbinom{k}{j}\dbinom{N-k}{n-j}}{\dbinom{N}{n}}.}$$

d) On a

$$\begin{aligned}\binom{k}{j}\binom{N-k}{n-j}\binom{N}{k} &= \frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{(N-k)!}{(n-j)!(N-k-n+j)!}\frac{N!}{k!(N-k)!}\\ &= \frac{(N-k)!N!}{j!(k-j)!(n-j)!(N-k-n+j)!(N-k)!}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\binom{n}{j}\binom{N-n}{k-j}\binom{N}{n} &= \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(N-n)!}{(k-j)!(N-n-k+j)!}\frac{N!}{n!(N-n)!}\\ &= \frac{(N-n)!N!}{j!(n-j)!(k-j)!(N-n-k+j)!(N-n)!}\end{aligned}$$

donc on a bien

$$\boxed{\binom{k}{j}\binom{N-k}{n-j}\binom{N}{k} = \binom{n}{j}\binom{N-n}{k-j}\binom{N}{n}.}$$

4) Soit $j \in G(\Omega)$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements associé à X, on a

$$\mathbb{P}(G=j) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}_{[X=k]}(G=j)\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=j}^{N} \mathbb{P}_{[X=k]}(G=j)\mathbb{P}(X=k),$$

puisque $\mathbb{P}_{[X=k]}(G=j) = 0$ pour tout $k \in [\![0,j]\!]$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G=j) = \sum_{k=j}^{N} \mathbb{P}_{[X=k]}(G=j)\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=j}^{N} \frac{\dbinom{k}{j}\dbinom{N-k}{n-j}}{\dbinom{N}{n}} \binom{N}{k} p^k(1-p)^{N-k}\\ &= \sum_{k=j}^{N} \binom{n}{j}\binom{N-n}{k-j} p^k(1-p)^{N-k},\end{aligned}$$

d'après la question précédente. Ainsi

$$\boxed{\forall j \in G(\Omega), \qquad \mathbb{P}(G=j) = \binom{n}{j}\sum_{k=j}^{N}\binom{N-n}{k-j}p^k(1-p)^{N-k}.}$$

5) Soit $j \in X(\Omega)$. Pour tout entier k tel que $N-n+j < k \leqslant N$, on a $k-j > N-n$ donc $\dbinom{N-n}{k-j} = 0$. Nous en déduisons que

$$\mathbb{P}(G=j) = \binom{n}{j}\sum_{k=j}^{N-n+j}\binom{N-n}{k-j}p^k(1-p)^{N-k}.$$

Faisons le changement de variable $\ell = k - j$ (on a donc $k = \ell + j$),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G = j) = \binom{n}{j} \sum_{\ell=0}^{N-n} \binom{N-n}{\ell} p^{\ell+j}(1-p)^{N-\ell-j} &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \sum_{\ell=0}^{N-n} \binom{N-n}{\ell} p^{\ell}(1-p)^{(N-n)-\ell} \\ &= \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \, (p+1-p)^{N-n} = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{G \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).}$