Devoir surveillé n° 3

1er décembre 2018

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. Encadrez ou soulignez les résultats principaux.

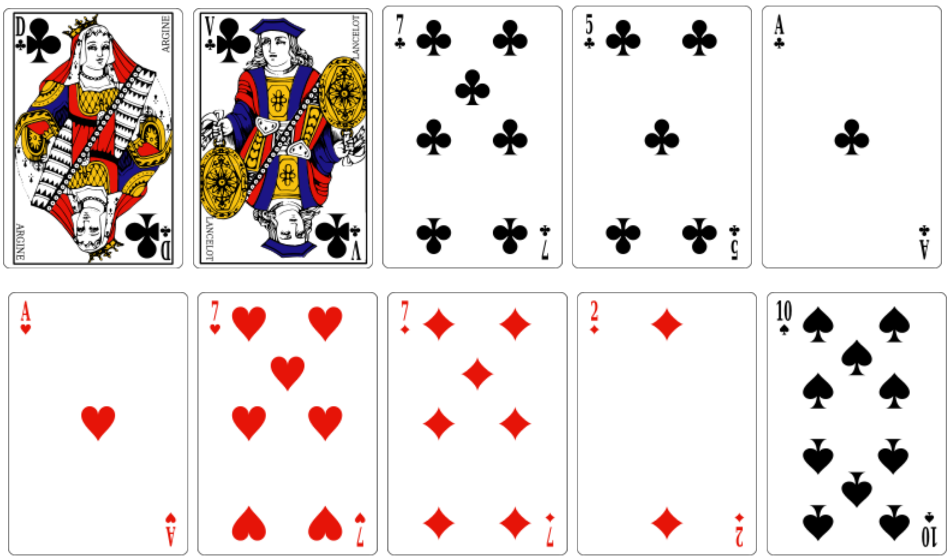
Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.

Exercice 1 : Questions en vrac

1) **Questions de cours.**
   a) Donner la définition d'une probabilité sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
   b) Calculer l'espérance d'une variable aléatoire X de loi $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

2) **Quelques questions de dénombrement** (*on ne cherchera pas à simplifier les formules*).
   a) Dans un jeu de 52 cartes, combien y a-t-il de mains de 10 cartes avec exactement cinq trèfles et exactement deux as (sachant que l'ordre ne compte pas) ?

      Par exemple : une telle main avec l'as de trèfle...



   b) Et donc, combien y a-t-il de mains de 10 cartes avec exactement cinq trèfles ou exactement deux as ?
   c) Combien y a-t-il de mots de 20 lettres utilisant l'alphabet latin (contenant 26 lettres), ayant un sens ou non, dont les 6 premières lettres sont distinctes et rangées par ordre alphabétique, les 12 suivantes forment une anagramme de DENOMBREMENT et les 2 dernières sont quelconques.

      Par exemple : ABGHUZOMDTNNEBEMERKC.

Exercice 2 : Une stratégie pour arriver en retard moins souvent ?

Un élève de S1B a le choix entre deux bus pour se rendre au lycée : le bus 53 et le bus 94. Le bus 53 (respectivement 94) a une probabilité $\alpha \in]0,1[$ (respectivement $\beta \in]0,1[$) d'être en retard. L'élève ne connaît pas les valeurs des probabilités α et β si bien qu'il adopte la stratégie suivante :

- Le jour de la rentrée il tire à Pile ou Face (avec une pièce équilibrée) pour choisir quel bus il prend.
- Les jours suivants, il utilise le même bus que la veille si celui-ci était arrivé à l'heure, sinon il change de bus.

Attention : a priori $\alpha + \beta$ n'est **pas** égal à 1 (mais ce n'est pas exclu non plus...).

On suppose que cette expérience peut être modélisée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à expliciter. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit A_n l'événement « L'élève prend le bus 53 le $n^{\text{ième}}$ jour » et on pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) \geqslant \dfrac{(1-\alpha)^{n-1}}{2}$ et $\mathbb{P}(\overline{A_n}) \geqslant \dfrac{(1-\beta)^{n-1}}{2}$.

2) Montrer soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = (1-\alpha-\beta)a_n + \beta$.

3) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de a_n en fonction de α et β.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité p_n pour que le bus emprunté le $n^{\text{ième}}$ jour soit à l'heure.

5) Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel p que l'on précisera.

6) Vérifier que $\min(1-\alpha, 1-\beta) \leqslant p \leqslant \max(1-\alpha, 1-\beta)$ et commenter.

7) Le 1^{er} décembre 2018 (le $N^{\text{ième}}$ jour de cours, avec $N = 132$), l'élève prend le bus 53. Calculer, en fonction de N et a_N, la probabilité qu'il ait déjà pris le bus 53 la veille ?

Exercice 3 : Étude d'une urne incomplète

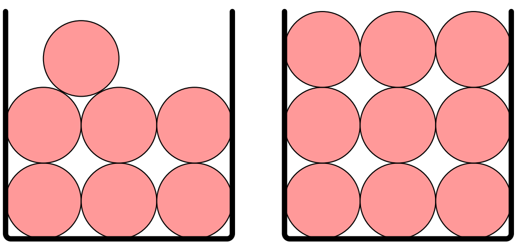
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On dispose de

- deux urnes U et V initialement vides et pouvant contenir au plus n boules chacune.
- une pièce de monnaie telle que la probabilité de tomber sur Pile est p.

On lance successivement la pièce au plus $2n-1$ fois. Lorsqu'elle tombe sur Pile, on ajoute une boule dans l'urne U. Lorsqu'elle tombe sur Face, on ajoute une boule dans l'urne V. On s'arrête lorsque l'une des deux urnes est pleine.

On suppose que cette expérience peut être modélisée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à expliciter. Pour tout $k \in [\![1, 2n-1]\!]$, on note A_k l'événement « la pièce tombe sur Pile au $k^{\text{ième}}$ lancer ». On suppose que les lancers de pièces sont indépendants de telle sorte que la famille $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant 2n-1}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.

On note X_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules contenues dans l'urne qui n'est pas pleine à l'issue de l'expérience.



Urne U Urne V

Ci-contre un exemple avec $n = 9$. En réalisant cette expérience aléatoire, nous avons obtenu la suite de lancers

F F F P P F P F F P F F P P P F

La 9ième Face est tombée à l'issue du 16ième lancer et nous nous sommes donc arrêtés. L'événement $[X_n = 7]$ est réalisé puisque l'urne incomplète (l'urne U ici) contient 7 boules.

1) Quel est l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par X_n ?

2) Déterminer la loi de X_1. Calculer son espérance et sa variance.

3) a) Pour chaque $k \in X_2(\Omega)$, écrire l'événement $[X_2 = k]$ en fonction des événements A_1, A_2 et A_3.

   b) En déduire la loi de X_2.

   c) Donner sans calculs son espérance et sa variance.

On suppose dans la suite de l'exercice que $n \geqslant 2$.

4) Donnons-nous $k \in X_n(\Omega)$.

   a) On introduit les événements
      - $B_{n,k}$: « Lors des $n-1+k$ premiers lancers, $n-1$ ont donné Pile et k ont donné Face ».
      - $C_{n,k}$: « Lors des $n-1+k$ premiers lancers, k ont donné Pile et $n-1$ ont donné Face ».

   Donner les valeurs des probabilités $\mathbb{P}(B_{n,k})$ et $\mathbb{P}(C_{n,k})$ en fonction de n et k.
   On justifiera proprement à l'aide d'un résultat du cours.

   b) Exprimer $[X_n = k]$ en fonction des événements $B_{n,k}$, $C_{n,k}$ et A_{n+k}.

   c) En déduire $\mathbb{P}(X_n = k)$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $p = \dfrac{1}{2}$.

5) a) En déduire alors que, pour tout $k \in X_n(\Omega)$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{1}{2^{n+k-1}}\dbinom{n+k-1}{k}$.

   b) Vérifier par le calcul que

$$\forall k \in [\![0, n-2]\!], \qquad 2(k+1)\,\mathbb{P}(X_n = k+1) = (n+k)\,\mathbb{P}(X_n = k).$$

6) En sommant cette relation, en déduire que $\mathbb{E}(X_n) = n - (2n-1)\mathbb{P}(X_n = n-1)$.

7) a) Pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, exprimer $2(k+1)^2\,\mathbb{P}(X_n = k+1)$ en fonction de $k\,\mathbb{P}(X_n = k)$, $k^2\,\mathbb{P}(X_n = k)$ et $\mathbb{P}(X_n = k)$.

   b) En sommant cette relation, en déduire que $\mathbb{E}(X_n^2) = (2n+1)\mathbb{E}(X_n) - n(n-1)$.

   c) En déduire l'expression de $\mathbb{V}(X_n)$ en fonction de n et $\mathbb{E}(X_n)$.

8) a) A l'aide des formules des questions 5a et 6, montrer que $n - \mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{2k}\right)$.

   On pourra commencer par exprimer le produit ci-dessus comme un produit de nombres impairs sur un produit de nombres pairs.

   b) Écrire alors un programme en langage Scilab qui :
      - demande à l'utilisateur un entier n supérieur ou égal à 2,
      - calcule le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{2k}\right)$ à l'aide d'une boucle `for`,
      - affiche les valeurs de $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ en faisant une phrase.

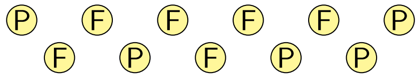
Tournez SVP.

Exercice 4 : choix aléatoires de pièces tirées aléatoirement

Soient $p \in]0,1[$, $N \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$ et $n \in [\![1, N-1]\!]$. On dispose de N pièces de monnaie non équilibrées, chaque pièce pouvant amener Pile avec la probabilité p. On lance les N pièces de monnaie en l'air toutes ensembles. Un joueur a les yeux bandés et n'a pas assisté au lancer. Il choisit au hasard (sans les regarder bien sûr) n pièces parmi les N pièces lancées. Parmi ces n pièces, il garde celles qui représentent Pile. On note :

- X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces ayant amené Pile.
- G la variable aléatoire représentant le nombre de pièces gagnées par le joueur.

Voici un exemple où $N = 11$ et $n = 6$. Nous avons lancé les 11 pièces simultanément et obtenu



L'événement $[X = 5]$ est donc réalisé. Si le joueur choisit au hasard les trois pièces les plus à gauche et les trois pièces les plus à droite, alors il se retrouve avec trois Piles et donc $[G = 3]$ est réalisé : il gagne 3 euros.

1) Déterminer la loi de X.

2) Déterminer $G(\Omega)$.

3) Soient $k \in [\![0, N]\!]$ et $j \in [\![0, k]\!]$.

   a) Combien y a-t-il de façons de choisir n pièces parmi les N pièces ?

   b) Supposons que, parmi les N pièces, exactement k ont amené Pile. Combien y a-t-il de façons de choisir n pièces parmi les N pièces dont exactement j représentent Pile.

   c) En déduire $\mathbb{P}_{[X=k]}(G = j)$.

   d) Vérifier que
$$\binom{k}{j}\binom{N-k}{n-j}\binom{N}{k} = \binom{n}{j}\binom{N-n}{k-j}\binom{N}{n}.$$

4) Montrer rigoureusement que, pour tout $j \in G(\Omega)$,
$$\mathbb{P}(G = j) = \binom{n}{j} \sum_{k=j}^{N} \binom{N-n}{k-j} p^k (1-p)^{N-k}.$$

5) En déduire la loi de G et commenter.
On fera un changement d'indice dans la somme ci-dessus après avoir remarqué que $\binom{N-n}{k-j} = 0$ pour tout entier k tel que $N - n + j < k \leqslant N$.