Correction du DS n° 2

Exercice 1 : Questions en vrac

1) **Question de cours.**

a) On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall A<0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \big(n\geqslant n_0 \quad\Longrightarrow\quad u_n\leqslant A\big).$$

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle admet deux limites distinctes ℓ et ℓ'. Prenons $\varepsilon=|\ell'-\ell|/4>0$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $|u_n-\ell|\leqslant\varepsilon$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', il existe $n_0'\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0'$, $|u_n-\ell'|\leqslant\varepsilon$.
Pour $n\geqslant\max(n_0,n_0')$, l'inégalité triangulaire entraîne que

$$|\ell-\ell'|=|(\ell-u_n)+(u_n-\ell')|\leqslant|\ell-u_n|+|u_n-\ell'|\leqslant 2\varepsilon=\frac{|\ell-\ell'|}{2}$$

C'est absurde. Elle admet donc une unique limite.

c) On écrit : « *Soit* $(x,x')\in E^2$ *tel que* $f(x)=f(x')$. *Montrons que* $x=x'$. »

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\frac{2\pi^{n+1}+n^{2018}3^n}{\pi^n-\sin(n)}=\frac{\pi^n\left(2\pi+n^{2018}\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^n\right)}{\pi^n\left(1-\dfrac{\sin(n)}{\pi^n}\right)}=\frac{2\pi+n^{2018}\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^n}{1-\dfrac{\sin(n)}{\pi^n}}.$$

- Puisque $\left|\dfrac{3}{\pi}\right|<1$, par croissances comparées, on a $n^{2018}\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|\dfrac{\sin(n)}{\pi^n}\right|\leqslant\dfrac{1}{\pi^n}$. Or $\pi^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ donc $\dfrac{1}{\pi^n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et donc, par encadrement, $\dfrac{\sin(n)}{\pi^n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Par quotient, nous en déduisons que $\boxed{\dfrac{2\pi^n+n^{2018}3^n}{\pi^n-\sin(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}2\pi.}$

3) Le discriminant du trinôme est $(i-3)^2-4\dfrac{i}{2}\left(3-\dfrac{3i}{2}\right)=-1+9-6i-6i-3=5-12i$.

Cherchons une racine carrée du complexe $5-12i$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}(x+iy)^2=5-12i\quad&\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x^2-y^2=5\\2xy=-12\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x^2-y^2=5\\x^2+y^2=|5-12i|=\sqrt{25+144}=13\\2xy=-12\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x^2=\dfrac{13+5}{2}=9\\y^2=\dfrac{13-5}{2}=4\\2xy=-12\end{cases}\\
&\Longleftrightarrow\quad\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}\end{aligned}$$

Nous en déduisons que $3-2i$ est une racine carrée de $5-12i$ dans $\mathbb{C}$. Ainsi le trinôme admet deux racines :

$$\frac{-(i-3)+3-2i}{2\times i/2} = \frac{6-3i}{i} = -3-6i \qquad \text{et} \qquad \frac{-(i-3)-3+2i}{2\times i/2} = \frac{i}{i} = 1.$$

$\boxed{\text{Les solutions sont donc } -3-6i \text{ et } 1.}$

... on aurait pu remarquer immédiatement que 1 est racine (mais ce n'était pas particulièrement évident à première vue) et factoriser immédiatement pour gagner du temps.

Exercice 2 : Valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$

---

1) Soit $z\in\mathbb{C}$ une solution de l'équation. Elle est non nulle donc il existe $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $z=re^{i\theta}$. Puisque $z^7=1$, on a $r^7e^{7i\theta}=e^{i\theta}$ si bien que $r^7=1$ et $7\theta\equiv[2\pi]$. Par conséquent $r=1$ et il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\theta=\dfrac{2k\pi}{7}$, d'où $z=e^{2ik\pi/7}$.

   Ensuite si k et ℓ sont deux entiers, on a $e^{2i(k+7\ell)/7}=e^{2ik\pi}e^{2i\pi}=e^{2ik\pi}$. Nous en déduisons qu'il existe $k\in[\![0,6]\!]$ tel que $z=e^{2ik\pi}=\omega^k$.

   Réciproquement, pour tout $k\in[\![0,6]\!]$, $(\omega^k)^7=e^{2ik\pi}=1$. Si bien que
   $\boxed{\text{l'équation admet 7 solutions : } 1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4,\ \omega^5,\ \omega^6.}$

2) Puisque $\omega\neq 1$, on a

$$1+S+T=\sum_{k=0}^{6}\omega^k=\frac{1-\omega^7}{1-\omega}=0,$$

   car $\omega^7=1$. Ensuite

$$\begin{aligned} ST=(\omega+\omega^2+\omega^4)(\omega^3+\omega^5+\omega^6) &= \omega^4+\omega^6+\omega^7+\omega^5+\omega^7+\omega^8+\omega^7+\omega^9+\omega^{10} \\ &= \omega^4+\omega^6+1+\omega^5+1+\omega^8+1+\omega^2+\omega^3 = 3+S+T. \end{aligned}$$

   Ainsi $\boxed{1+S+T=0 \text{ et } ST-S-T=3.}$

3) Ainsi $\boxed{S+T=-1 \text{ et } ST=2.}$

4) a) On a

$$\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)=2\cos\left(\frac{4\pi/7+6\pi/7}{2}\right)\sin\left(\frac{4\pi/7-6\pi/7}{2}\right)=2\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right).$$

   Puisque $\dfrac{5\pi}{7}\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$, on a $\cos\left(\dfrac{5\pi}{7}\right)<0$. Puisque $-\dfrac{\pi}{7}\in\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$, on a $\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)<0$.

   Par conséquent $\boxed{\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)-\sin\left(\dfrac{6\pi}{7}\right)>0.}$

   b) On a $\dfrac{8\pi}{7}=-\dfrac{6\pi}{7}+2\pi$ donc

$$\mathfrak{Im}(S)=\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)-\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)>0.$$

   Puisque $\dfrac{2\pi}{7}\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)>0$ et , d'après la question précédente, nous obtenons que $\boxed{\mathfrak{Im}(S)>0.}$

5) On a $ST = 2$ et $S + T = -1$ donc $S^2 + ST = -S$ et donc $S^2 + S + 2 = 0$. Ainsi S est une racine du trinôme $X^2 + X + 2 = 0$. Or son discriminant est $-7 < 0$ donc il admet deux racines complexes conjuguées :

$$\frac{-1 - i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}.$$

Comme $\mathfrak{Im}(S) > 0$, nous en déduisons que $\boxed{S = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}.}$

On a alors $T = \dfrac{2}{S} = \dfrac{4}{-1 + i\sqrt{7}} = \dfrac{4(-1 - i\sqrt{7})}{8}$ et donc $\boxed{T = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}.}$

6) Il s'ensuit que $\boxed{\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\dfrac{8\pi}{7}\right) = \mathfrak{Re}(S) = -\dfrac{1}{2}}$ et

$$\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \mathfrak{Im}(S) = \frac{\sqrt{7}}{2}.}$$

Exercice 3 : Étude d'une suite récurrence avec un paramètre

Partie A : préliminaires

1) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = 1 - \lambda x^2 - x$. Il s'agit d'un trinôme de second degré dont le discriminant est $(-1)^2 - 4 \times (-\lambda) \times 1 = 1 + 4\lambda > 0$. Il admet donc deux racines réelles distinctes :

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2(-\lambda)} = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\lambda} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2(-\lambda)} = \frac{\sqrt{1 + 4\lambda} - 1}{2\lambda}.$$

Nous en déduisons que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - x = -\lambda(x - \alpha)(x - \beta).}$$

Par ailleurs $\alpha < 0$ (comme somme de deux réels strictement négatifs) et

$$\beta = \frac{\sqrt{1 + 4\lambda} - 1}{2\lambda} = \frac{(\sqrt{1 + 4\lambda})^2 - 1^2}{2\lambda(\sqrt{1 + 4\lambda} + 1)} = \frac{4\lambda}{2\lambda(\sqrt{1 + 4\lambda} + 1)} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4\lambda} + 1} \in \,]0, 1[$$

car $\sqrt{1 + 4\lambda} + 1 > \sqrt{1} + 1 = 2$. Ainsi $\boxed{\alpha < 0 < \beta < 1.}$

b) Nous en déduisons que $\boxed{f(x) - x > 0 \text{ (resp. } > 0) \text{ si } x \in \,]\alpha, \beta[\text{ (resp. } x \in \,]-\infty, \alpha[\, \cup \,]\beta, +\infty[).}$

c) $\boxed{\text{Les points fixes de } f \text{ sont } \alpha \text{ et } \beta}$ puisqu'il s'agit des réels x vérifiant $f(x) - x = 0$.

2) La fonction carrée est strictement croissante (resp. décroissante) sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. sur $\mathbb{R}_-^*$) donc la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. sur $\mathbb{R}_-^*$). On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$		α		0		β		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	α	$\nearrow$	1	$\searrow$	β	$\searrow$	$1 - \lambda$	$\searrow$	$-\infty$

3)

```
x=input('Entrez un réel x :');
lambda=input('Entrez un réel lambda dans ]0,1] :');
y=1-lambda*x∧2; y=1-lambda*y∧2;
disp('On a fof('+string(x)+')='+string(y)+'.');
```

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\big(f(x)-x\big)(\lambda^2x^2-\lambda x+1-\lambda) &= (1-\lambda x^2-x)(\lambda^2x^2-\lambda x+1-\lambda)\\ &= \lambda^2x^2-\lambda x+1-\lambda-\lambda^3x^4+\lambda^2x^3+(1-\lambda)\lambda x^2-\lambda^2x^3+\lambda x^2-(1-\lambda)x\\ &= -\lambda^3x^4+2x\lambda x^2-x+1-\lambda\\ &= 1-\lambda(1-2\lambda x^2+\lambda^2x^4)-x\\ &= 1-\lambda(1-\lambda x^2)^2-x = f\circ f(x)-x\end{aligned}$$

On a bien $\boxed{f\circ f(x)-x = \big(f(x)-x\big)(\lambda^2x^2-\lambda x+1-\lambda).}$

b) Un réel x est un point fixe de $f\circ f$ si et seulement si $f\circ f(x)-x=0$ si et seulement si $f(x)-x=0$ ou $\lambda^2x^2-\lambda x+1-\lambda=0$.

Ainsi les points fixes de $f\circ f$ sont α, β et les éventuelles racines du trinôme $\lambda^2X^2-\lambda X+1-\lambda$. Son discriminant est $\Delta=(-\lambda)^2-4\lambda^2(1-\lambda)=4\lambda^3-3\lambda^2=\lambda^2(4\lambda-3)$.

- Si $\lambda \in \,]0,3/4[$, alors $4\lambda-3<0$ et donc $\Delta<0$. Le trinôme n'admet pas de solutions. Dans ce cas, $\boxed{\text{les points fixes de } f\circ f \text{ sont } \alpha \text{ et } \beta.}$
- Si $\lambda=3/4$, alors $\Delta=0$ et le trinôme admet une unique solution : $\gamma=\dfrac{\lambda}{2\lambda^2}=\dfrac{2}{3}$.
  On remarque que $\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{1+3}}{2(3/4)}=-2$ et $\beta=\dfrac{\sqrt{1+3}-1}{2(3/4)}=\dfrac{2}{3}=\gamma$. Dans ce cas,
  $\boxed{\text{les points fixes de } f\circ f \text{ sont } \alpha=-2 \text{ et } \beta=\dfrac{2}{3}.}$
- Si $\lambda \in \,]3/4,1]$, alors $\Delta>0$ et le trinôme admet deux solutions réelles :

$$\gamma=\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2(4\lambda-3)}}{2\lambda^2}=\frac{1-\sqrt{4\lambda-3}}{2\lambda} \qquad \text{et} \qquad \xi=\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2(4\lambda-3)}}{2\lambda^2}=\frac{1+\sqrt{4\lambda-3}}{2\lambda}.$$

  Dans ce cas, $\boxed{\text{les points fixes de } f\circ f \text{ sont } \alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ et } \xi.}$

Partie B : cas où $u_0 \in \,]-\infty,\alpha]$

1) Puisque α est un point fixe de f, par récurrence immédiate, $\boxed{\text{si } u_0=\alpha, \text{ alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante.}}$

2) Supposons dans cette question que $u_0 \in \,]-\infty,\alpha[$.

a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $P(n)$: « $u_n \in \,]-\infty,\alpha[$ ». Procédons par récurrence.

- $P(0)$ est vraie par hypothèse.
- Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$. On a $u_n \leqslant \alpha$ et, comme f est croissante sur $]-\infty,\alpha[$, on obtient $f(u_n)\geqslant f(\alpha)$, c'est-à-dire $u_{n+1}\geqslant\alpha$. Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Ainsi, par récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n \in \,]-\infty,\alpha[.}$

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n<\alpha$ donc $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n<0$ d'après la question 1b de la partie A. Nous en déduisons que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

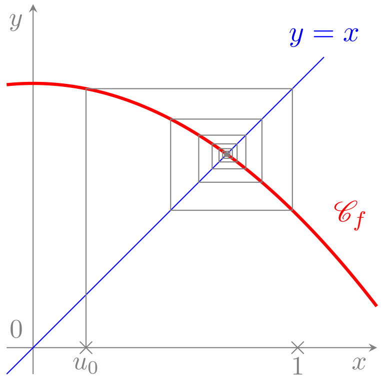
c) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle converge vers un réel $m=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \leqslant u_0<\alpha$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, m est un point fixe de f, i.e. α ou β. C'est absurde puisque $m<\alpha<\beta$.

Ainsi elle n'est pas minorée donc le théorème de la limite monotone entraîne que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.}$

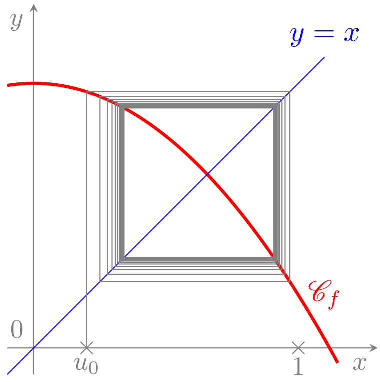
Partie C : cas où $u_0 \in [0,1]$

1) Puisque β est un point fixe de f, par récurrence immédiate, $\boxed{\text{si } u_0 = \beta, \text{ alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante.}}$

Graphiquement, on obtient :



CAS OÙ $\lambda \in [0,3/4]$



CAS OÙ $\lambda \in]3/4,1]$

On peut conjecturer que la suite converge vers β dans le cas où $\lambda \in]0,3/4]$ et diverge dans le cas où $\lambda \in]3/4,1]$ (les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ semblent converger mais pas vers la même limite).

2) On a $f([0,1]) =]1-\lambda, 1]$ et $1-\lambda \geqslant 0$. Ainsi $f([0,1]) \subset [0,1]$ et une récurrence immédiate montre alors que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1].}$

3) On suppose que $u_2 < u_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $Q(n)$: « $u_{2(n+1)} \leqslant u_{2n}$ ». Procédons par récurrence.
   - $Q(0)$ est vraie par hypothèse.
   - Supposons que $Q(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{2(n+1)} \leqslant u_{2n}$ et, comme f est décroissante sur $[0,1]$, on obtient $f(u_{2(n+1)}) \geqslant f(u_{2n})$, c'est-à-dire $u_{2n+3} \geqslant u_{2n+1}$. Nous en déduisons de même que $f(u_{2n+3}) \leqslant f(u_{2n+1})$, c'est-à-dire $u_{2(n+2)} \geqslant u_{2(n+1)}$. Ainsi $Q(n+1)$ est vraie.

   Ainsi, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2(n+1)} \leqslant u_{2n}$. Cela signifie que $\boxed{\text{la suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{2(n+1)} \leqslant u_{2n}$ donc $u_{2(n+1)+1} = f(u_{2(n+1)}) \geqslant f(u_{2n}) = u_{2n+1}$, car f est décroissante sur $[0,1]$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

4) Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et bornées donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elles convergent}}$. Notons ℓ et ℓ' leurs limites respectives. Puisque $f \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons que ℓ et ℓ' sont des points fixes de $f \circ f$ sur $[0,1]$.

5) Supposons que $\lambda \in [0,3/4]$. Le réel β est alors le seul point fixe de $f \circ f$ sur $[0,1]$. Ainsi $\ell = \ell' = \beta$. Il s'ensuit que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite. Nous en déduisons que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \beta.}$

6) Supposons que $\lambda \in]3/4,1]$.
   a) On suppose que $u_0 \in [0,\gamma]$. On a alors $u_1 = f(u_0) > f(\gamma)$ car f est strictement décroissante sur $[0,1]$. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant \gamma$ et $f(\gamma) \leqslant u_{2n+1}$. Puisque $f \circ f$ est strictement croissante sur $[0,1]$, on a

   $$f \circ f(u_{2n}) \leqslant f \circ f(\gamma) \qquad \text{et} \qquad f \circ f(f(\gamma)) \leqslant f \circ f(u_{2n+1}).$$

   Comme γ est un point fixe de $f \circ f$, on a $f \circ f(f(\alpha)) = f(f \circ f(\alpha)) = f(\alpha)$ donc

   $$u_{2(n+1)} \leqslant \gamma \qquad \text{et} \qquad f(\gamma) \leqslant u_{2(n+1)+1}.$$

   $\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence.}}$ En passant à la limite, on obtient $\ell \leqslant \gamma$ et $f(\gamma) \leqslant \ell'$. En particulier $\ell \neq \ell'$. Ainsi $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge.}}$

b) Soit $x \in]\gamma, \beta[$. On a

- $f(x) - x > 0$ d'après la question 1b de la partie A
- $\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda = \lambda^2 (x-\gamma)(x - f(\gamma)) < 0$ d'après la question 4b de la partie A.

Par conséquent $\boxed{f \circ f(x) - x < 0}$.

c) On suppose que $u_0 \in]\gamma, \beta[$. La question précédente nous assure que $u_2 - u_0 = f \circ f(u_0) - u_0 < 0$, c'est-à-dire $\boxed{u_2 < u_0}$. D'après la question 4b, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est alors décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi

$$\ell = \inf_{n\in\mathbb{N}} u_{2n} \leqslant u_0 < \beta \qquad \text{et} \qquad \beta < f(u_0) = u_1 \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} u_{2n+1} = \ell'.$$

En particulier $\ell \neq \ell'$. Ainsi $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge.}}$

Partie D : les autres cas

1) Supposons dans cette question que $u_0 \in]\alpha, 0[$.

a) Puisque $f(]\alpha, 1[) \subset]\alpha, 1[$, une récurrence immédiate montre que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in]\alpha, 1].}$

b) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]\alpha, 0[$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$ d'après la question 1b de la partie A. Nous en déduisons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée par 0, $\boxed{\text{elle converge}}$ vers $m' = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ d'après le théorème de la limite monotone. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, m' est un point fixe de f, i.e. α ou β. Mais on a $\alpha < u_0 \leqslant m' \leqslant 0$. $\boxed{\text{C'est absurde.}}$

c) Nous en déduisons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [0, 1]$ et donc, d'après les résultats de la partie B appliqués à la suite $(u_{n+n_0})_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient

- $\boxed{\text{Si } \lambda \in [0, 3/4], \text{ alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \beta.}$
- $\boxed{\text{Si } \lambda \in]3/4, 1], \text{ alors } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge.}}$

2) Si $u_0 > 1$, alors $u_1 \leqslant 1$. Les résultats précédents s'appliquent donc à la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants

1) a) On a $u_1 > 0$ et $u_2 = u_1 + u_0 > 0$. Supposons que $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n > 0$. Par récurrence double, nous en déduisons que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0.}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = r^{n-1} u_{n-1} > 0$. Ainsi $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est strictement croissante.}}$

Il y avait une petite erreur d'énoncé : a priori on pourrait avoir $u_1 \leqslant u_0$. Mais la suite est strictement croissante à partir du rang 1.

2) On suppose que $r = 1$.

a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors linéaire récurrente d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique est $x^2 - x - 1 = 0$. Elle admet deux racines réelles : $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Nous en déduisons qu'il existe des réels λ et μ tels que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.}$$

b) Si $u_0 = 0$, alors $0 = \lambda + \mu$ et donc $\lambda = -\mu$. Si $u_1 = 1$, alors

$$1 = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \lambda\sqrt{5}.$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Puisque $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, on a

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$

c) Pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il faut et il suffit que $\lambda = 0$. Si $\lambda = 0$, alors $u_0 = \mu$ et $u_1 = \mu\frac{1-\sqrt{5}}{2} = u_0\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leqslant 0$. Comme $u_1 > 0$, par contraposée, on obtient que $\lambda \neq 0$. Ainsi $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pour aucune valeurs de } u_0 \text{ et } u_1 \text{ lorsque } 0 \leqslant u_0 \text{ et } 0 < u_1.}$

3) On suppose que $r > 1$.

a) On a $u_2 > u_1 = (2-1)u_1$. Supposons que $u_n > (n-1)\,u_1$ pour un certain $n \geqslant 2$. Par stricte croissance de la suite, il s'ensuit que

$$u_{n+1} = u_n + r^{n-1}u_{n-1} > (n-1)u_1 + r^{n-1}u_1 > (n-1)u_1 + u_1 = nu_1.$$

Par récurrence, nous en déduisons que $\boxed{u_n > (n-1)u_1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}.}$

b) Comme $u_1 > 0$, $(n-1)u_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par encadrement, nous en déduisons que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } +\infty.}$

4) On suppose que $0 < r < 1$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n > 0$, $u_{n+1} > 0$ et $u_{n-1} < u_n$ (par stricte croissante de la suite) donc

$$\boxed{0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n + r^{n-1}u_{n-1}}{u_n} \leqslant 1 + r^{n-1}\frac{u_{n-1}}{u_n} < 1 + r^{n-1}.}$$

b) La fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leqslant 0$. Ainsi f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, $f(x) \leqslant f(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Ainsi $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+x) \leqslant x.}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $r^{k-1} \geqslant 0$ donc $\ln(1 + r^{k-1}) \leqslant r^{k-1}$. On somme :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + r^{k-1}\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + r^{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} r^j = \frac{1-r^n}{1-r} \leqslant \frac{1}{1-r}.$$

Puisque la fonction $\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient $\boxed{\prod_{k=1}^{n}\left(1 + r^{k-1}\right) \leqslant e^{1/(1-r)}.}$

d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc le théorème de la limite monotone entraîne que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$