Devoir surveillé no 2

20 octobre 2018

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Le devoir est volontairement long et il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet. Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. Encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.

Exercice 1 : Questions en vrac

1) **Question de cours.**
   a) Donner la définition quantifiée d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $-\infty$.
   b) Montrer l'unicité de la limite d'une suite réelle convergente.
   c) Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Écrire le début de la démonstration de l'injectivité de f.
2) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2\pi^{n+1}+n^{2018}3^n}{\pi^n-\sin(n)}$.
3) Résoudre l'équation $\dfrac{i}{2}z^2+(i-3)z+3-\dfrac{3i}{2}=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Exercice 2 : Valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$

Posons $\omega=e^{2i\pi/7}$. Introduisons $S=\omega+\omega^2+\omega^4$ et $T=\omega^3+\omega^5+\omega^6$.

1) Justifier soigneusement que l'équation $z^7=1$, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$, admet exactement 7 solutions que l'on explicitera en fonction de ω.
2) Calculer $1+S+T$ et $ST-S-T$.
3) En déduire les valeurs de $S+T$ et ST.
4) a) Montrer que $\sin\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)>\sin\left(\dfrac{6\pi}{7}\right)$.
   b) En déduire que $\mathfrak{Im}(S)>0$.
5) Déterminer alors les valeurs de S et T.
6) Conclure que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)=-\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Soit $\lambda \in]0,1]$. Nous introduisons la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = 1 - \lambda u_n^2.$$

Partie A : préliminaires

Introduisons la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1 - \lambda x^2$.

1) a) Déterminer deux réels α et β (qui dépendent de λ) tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - x = -\lambda(x-\alpha)(x-\beta).$$

Vérifier que $\alpha < 0 < \beta < 1$.

b) En déduire le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Quels sont les points fixes de f ?
On rappelle que les points fixes de f sont les réels x vérifiant $f(x) = x$.

2) Dresser le tableau de variations de la fonction f, sur lequel on fera apparaitre notamment α et β.

3) Écrire un script en langage Scilab qui demande à l'utilisateur un réel $\lambda \in]0,1]$ et un réel x, qui calcule $f \circ f(x)$ et qui affiche la valeur obtenue en faisant une phrase.

4) a) Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f \circ f(x) - x = \big(f(x) - x\big) \times (\lambda^2 x^2 - \lambda x + 1 - \lambda).$$

b) En déduire les points fixes de $f \circ f$.
On fera trois cas selon que $\lambda \in]0, 3/4[$, $\lambda = 3/4$ ou $\lambda \in]3/4, 1]$.

Partie B : cas où $u_0 \in]-\infty, \alpha]$

1) Que dire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = \alpha$?

2) Supposons dans cette question que $u_0 \in]-\infty, \alpha[$.

a) Justifier soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-\infty, \alpha[$.

b) En déduire les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Montrer alors que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Partie C : cas où $u_0 \in [0,1]$

1) Que dire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = \beta$?

Dans tout le reste de cette partie, on suppose $u_0 \in [0, \beta[\cup]\beta, 1]$.
On pourra s'aider de l'annexe page 4.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

3) On suppose que $u_2 < u_0$. Montrer soigneusement que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
On montre de même (on ne demande pas de le faire ici) que, si $u_2 > u_0$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Elles sont constantes si $u_2 = u_0$.

4) En déduire la nature des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

5) Supposons que $\lambda \in [0, 3/4]$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

6) Supposons dans cette question que $\lambda \in]3/4, 1]$. Notons alors γ le plus petit point fixe positif de $f \circ f$. On vérifie (*on ne demande pas de le faire ici*) que $0 \leqslant \gamma < \beta < f(\gamma) \leqslant 1$.
   a) On suppose que $u_0 \in [0, \gamma]$. Montrer brièvement que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n} \leqslant \gamma \qquad \text{et} \qquad f(\gamma) \leqslant u_{2n+1}.$$
   En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   b) Quel est le signe de $f \circ f(x) - x$ lorsque $x \in]\gamma, \beta[$.
   c) On suppose que $u_0 \in]\gamma, \beta[$. Montrer alors que $u_2 < u_0$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

   Si $u_0 \in]\beta, 1]$, alors $u_1 \in [0, \beta[$ et donc les résultats de cette question s'appliquent à la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. On conclut également qu'elle diverge.

Partie D : les autres cas

Cette partie est facultative et ne doit être abordée que si vous avez traité l'intégralité du sujet.

1) Supposons dans cette question que $u_0 \in]\alpha, 0[$.
   a) Montrer brièvement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]\alpha, 1]$.
   b) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]\alpha, 0[$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et aboutir à une contradiction.
   c) Que peut-on conclure sur la nature de la suite ?
2) Qu'en est-il du cas où $u_0 > 1$?

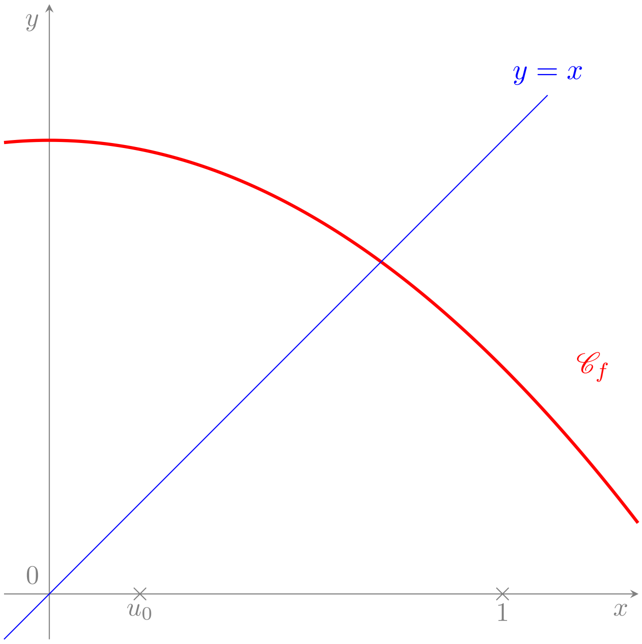
Exercice 4 : Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants

Soit r un réel strictement positif. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0 \geqslant 0$, $u_1 > 0$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + r^n\, u_n.$$

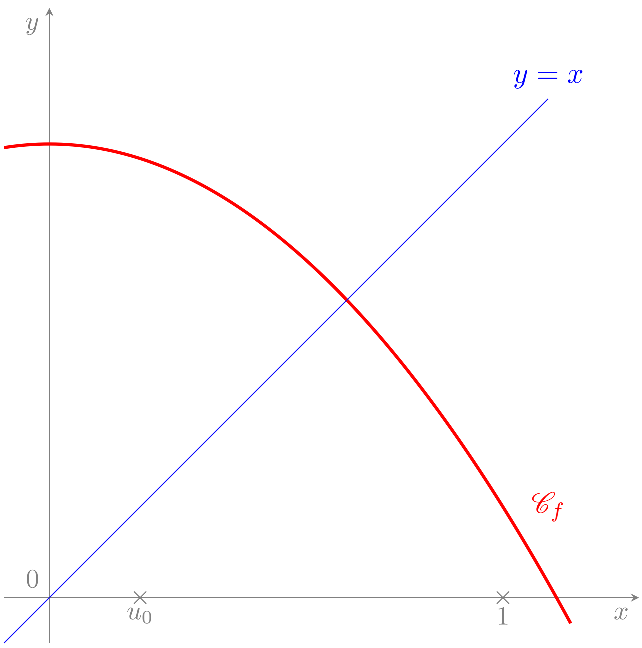
1) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$.
   b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2) Dans cette question, on suppose que $r = 1$.
   a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, expliciter u_n en fonction de n.
   b) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.
   c) Existe-t-il des valeurs de u_0 et u_1 telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?
3) Dans cette question, on suppose que $r > 1$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$, $u_n > (n-1)\, u_1$.
   b) En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4) Dans cette question, on suppose que $0 < r < 1$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 + r^{n-1}$.
   b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + r^{k-1}\right) \leqslant e^{1/(1-r)}.$$
   d) Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   On ne cherchera pas à préciser la limite.

ANNEXE

Pour vous aider à traiter la partie C de l'exercice 3, vous pouvez conjecturez la limite de la suite en utilisant la courbe représentative de f *sur* $[0,1]$*, selon que* $\lambda \in]0,3/4]$ *ou* $\lambda \in]3/4,1]$ *:*



CAS OÙ $\lambda \in [0,3/4]$



CAS OÙ $\lambda \in]3/4,1]$

Ne me rendez pas l'énoncé et ne reproduisez pas ces graphiques sur votre copie : c'est juste pour vous aider.