Correction du DS n° 1

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Ouvrez votre cours.
2) Faisons le changement d'indices $j = k+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k+1}(-2)^k = \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{j}(-2)^{j-1} &= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{j}(-2)^j 1^{n-j}\\ &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{j}(-2)^j 1^{n-j} + \binom{n}{n+1}(-2)^{n+1} - \binom{n}{0}(-2)^0\right)\\ &= -\frac{1}{2}\Big((-2+1)^n + 0 - 1\Big) = \boxed{\frac{1-(-1)^n}{2},}\end{aligned}$$

où on a utilisé la formule du binôme de Newton.

3) On coupe la somme selon que $i = j$, $i < j$ ou $j < i$:

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\min(i,i) + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\min(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\min(i,j) = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} j.$$

Puisque les indices sont des variables muettes, on remarque que les deux dernières sommes sont égales. On a donc :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j) = \sum_{i=1}^{n} i + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i = \frac{n(n+1)}{2} + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} i\left(\sum_{j=i+1}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) &= n\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2\\ &= n\,\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\ &= \frac{n(n-1)\big(3n-(2n-1)\big)}{6}\\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{6}.\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(3+2(n-1))}{6} = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

4) Soit $x\in\mathbb{R}$. Le terme $4 - x + \sqrt{2x-5} > 0$ est bien défini si et seulement si $2x - 5 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [5/2, +\infty[$.

Donnons-nous alors $x \in [5/2, +\infty[$.

- Si $x < 4$, alors $4 - x > 0$ et donc $4 - x + \sqrt{2x-5}$. Ainsi x est solution.

- Si $x \geqslant 4$, alors $x-4 \geqslant 0$. Puisque la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 4-x+\sqrt{2x-5}>0 \iff \sqrt{2x-5}>x-4 &\iff 2x-5>(x-4)^2 \\ &\iff 2x-5>x^2-8x+16 \\ &\iff 0>x^2-10x-21 \\ &\iff 0>(x-3)(x-7). \end{aligned}$$

Puisque $x-3 \geqslant 4-3>0$, nous avons $0>(x-3)(x-7)$ si et seulement si $x<7$.

Nous en déduisons que $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est l'intervalle } [5/2,7[.}$

5) a) La fonction $\cos$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1,1]$ donc la fonction $1-\cos^3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0,2]$. Enfin la fonction $y \longmapsto y^{1/5}$ est définie sur $[0,2]$ donc la fonction $\boxed{h \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

La fonction $1-\cos^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0,2]$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1-\cos^3(x)=0 \iff \cos(x)=1 \iff x \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Enfin la fonction $y \longmapsto y^{1/5}$ est dérivable sur $]0,2]$ donc la fonction $\boxed{h \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}.}$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$,

$$h'(x)=-3(-\sin(x))\cos^2(x)\,\frac{1}{5}\big(1-\cos^3(x)\big)^{1/5-1}=\frac{3\sin(x)\cos^2(x)}{5\left(1-\cos^3(x)\right)^{4/5}}=\sin(x)\underbrace{\frac{3\cos^2(x)}{5\left(1-\cos^3(x)\right)^{4/5}}}_{\geqslant 0}.$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z},\ h'(x) \text{ a le signe de } \sin(x)}.$

6) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} g(x)-(x-1)=\sqrt{x^2-2x+3}-(x-1)=\frac{(\sqrt{x^2-2x+3})^2-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+3}+(x-1)} &= \frac{x^2-2x+3-x^2+2x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}+x-1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2-2x+3}+x-1}. \end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x+3)=+\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty}\sqrt{y}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x+3}=+\infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}+x-1)=+\infty$. Nous en déduisons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(g(x)-(x-1)\big)=0$.

Cela signifie que $\boxed{\text{la courbe représentative de } g \text{ admet la droite d'équation } y=x-1 \text{ pour asymptote en } +\infty.}$

Exercice 2 : Équation $x^y = y^x$

Partie A : quelques cas particuliers

1) Pour tout réel $y>1$, on a $y^1=y>1=1^y$. Nous en déduisons que

$\boxed{\text{l'ensemble des réels } y \text{ tels que } (1,y) \text{ est solutions de } (E) \text{ est l'ensemble vide}}$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 5$ notons $P(n)$ la propriété $P(n)$: « $2^n > n^2$ ». Procédons par récurrence.

- *Initialisation :* On a $2^5=32>25=5^2$. Ainsi $P(5)$ est vraie.
- *Hérédité :* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain entier naturel $n \geqslant 5$. Montrons que $P(n+1)$ est alors vraie. L'hypothèse de récurrence entraîne que

$$2^{n+1}-(n+1)^2=2\cdot 2^n-(n+1)^2>2n^2-(n+1)^2=n^2-2n-1.$$

Or le trinôme X^2-2X-1 admet deux racines $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$. Elles sont toutes les deux strictement inférieures à 5 si bien que

$$2^{n+1}-(n+1)^2>(n-1-\sqrt{2})(n-1+\sqrt{2})>0.$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Nous en déduisons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

b) Soit $y \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

- On a $2^3 = 8 < 9 = 3^2$. Par conséquent, si $y = 3$, alors $(2, y)$ n'est pas solution de (E).
- On a $2^4 = 16 = 4^2$. Par conséquent, si $y = 4$, alors $(2, y)$ est pas solution de (E).
- Il découle de la question précédente que, si $y \geqslant 5$, alors $(2, y)$ n'est solution de (E)

Nous en déduisons que $\boxed{\text{l'ensemble des entiers } y \text{ tels que } (2,y) \text{ est solutions de } (E) \text{ est l'ensemble } \{4\}.}$

3) Soit $u \in]1, +\infty[$. Posons $x = u^{1/(u-1)}$ et $y = u^{u/(u-1)}$.

a) On a $ux = u \cdot u^{1/(u-1)} = u^{1+1/(u-1)} = u^{u/(u-1)} = y$ et $x^u = \left(u^{1/(u-1)}\right)^u = u^{u/(u-1)} = y$. Ainsi $\boxed{x^u = y = ux.}$

b) Nous en déduisons que $x^y = x^{ux} = (x^u)^x = y^x$. De plus $u > 1$ et $x > 0$ donc $ux > x$, c'est-à-dire $0 < x < y$. Ainsi $\boxed{(x, y) \text{ est solution de } (E).}$

c) Si on choisit $u = 3$, alors $x = 3^{1/(3-1)} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$ et $y = 3^{3/(3-1)} = 3^{3/2} = \sqrt{3^3} = \sqrt{27}$. Il découle de la question précédente que $\boxed{(\sqrt{3}, \sqrt{27}) \text{ est solution de } (E).}$

Partie B : le cas général

1) Soient x et y deux réels strictement positifs. Par définition $x^y = e^{y\ln(x)}$ et $y^x = e^{x\ln(y)}$. Puisque $\exp$ est une bijection sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons que $x^y = y^x$ si et seulement si $y\ln(x) = x\ln(y)$. Enfin $x \neq 0$ et $y \neq 0$ donc, en divisant par $xy \neq 0$ chaque membre de l'équation, on obtient $\boxed{x^y = y^x \text{ si et seulement si } f(x) = f(y).}$

2) a) Les fonctions $\ln$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$ dont leur produit aussi. Ainsi $D_f = \mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, elles sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc il en est de même pour la fonction f. Ensuite

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{x \times \frac{1}{x} - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.}$$

b) On a

- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0}$ (par croissances comparées).
- $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ si bien que $\boxed{\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}$ (par produit).

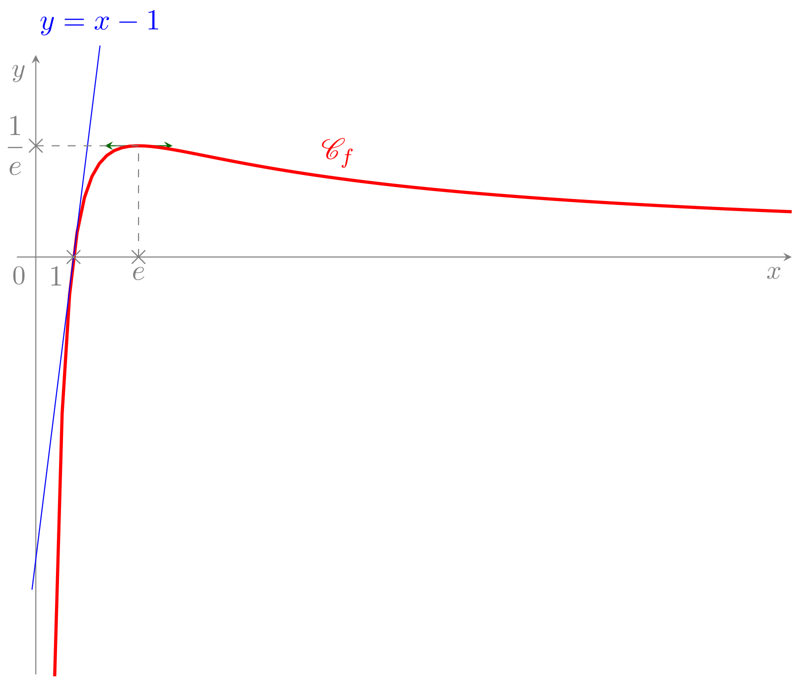
Ainsi $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$ et l'axe des ordonnées pour asymptote verticale en 0

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) > 0$ si et seulement si $1 - \ln(x) > 0$ si et seulement si $e > x$ (puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$). Nous en déduisons le tableau de variations :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

d) Puisque $f(1) = 0$ et $f'(1) = \dfrac{1 - \ln(1)}{1^2} = 1$, nous en déduisons que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1 est la courbe d'équation $\boxed{y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1.}$

e) D'où la courbe $\mathscr{C}_f$:



3) D'après l'étude précédente, nous avons $f(]0,e]) =]-\infty, 1/e]$ et $f([e,+\infty[) =]0,1/e[$. Nous en déduisons que les réels de $]1/e,+\infty[$ n'ont pas d'antécédent par f. Ensuite la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Ainsi le théorème de la bijection entraîne que :
   - Tout $y \in]-\infty, 1/e]$ admet un unique antécédent par f sur $]0,e]$.
   - Tout $y \in]-\infty, 1/e]$ admet un unique antécédent par f sur $[e,+\infty[$.

   Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble des réels admettant exactement deux antécédents par } f \text{ est intervalle }]0,1/e[.}$

4) a) Nous en déduisons que :
   - Si $x \in]0,e[$, alors il existe un unique réel $y \in]e,+\infty[$ tel que (x,y) est solution de (E).
   - Si $x \in [e,+\infty[$, alors il n'existe pas de réel y tel que (x,y) est solution de (E).

   b) Si un couple d'entiers (x,y) est solution de (E), alors $x \in]0,e[$ et donc $x = 1$ ou $x = 2$. On a vu dans la partie A que :
   - Si $x = 1$, alors il n'existe pas de réel y tel que (x,y) est solution de (E)
   - Si $x = 2$, alors le seul y tel que (x,y) est solution de (E) est 4.

   Réciproquement $(2,4)$ est bien solution de (E).

   Nous en déduisons que $\boxed{(2,4) \text{ est l'unique couple d'entier qui est solution de } (E).}$

5) On a $e < \pi$. Puisque f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$, nous obtenons que $f(e) > f(\pi)$ donc $\pi \ln(e) > e \ln(\pi)$ et donc (puisque $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$), $\boxed{e^\pi > \pi^e.}$

Exercice 3 : Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Hardy

Partie A : inégalité de Cauchy-Schwarz

1) Si a_1 et b_1 sont deux réels, alors le membre de gauche et le membre de droite sont égaux (à ${a_1}^2{b_1}^2$) donc $\boxed{P(1) \text{ est vérifiée.}}$

2) a) On reconnaît une identité remarquable : $\boxed{{a_2}^2{b_1}^2 + {a_1}^2{b_2}^2 - 2a_1a_2b_1b_2 = (a_2b_1 - a_1b_2)^2 \geqslant 0.}$

b) La méthode classique pour comparer deux nombres : on fait la différence et on étudie le signe :

$$\begin{aligned}&\left({a_1}^2+{a_2}^2\right)\times\left({b_1}^2+{b_2}^2\right)-(a_1b_1+a_2b_2)^2\\&\quad=\left({a_1}^2{b_1}^2+{a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2\right)-\left({a_1}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2+2a_1a_2b_1b_2\right)\\&\quad={a_2}^2{b_1}^2+{a_1}^2{b_2}^2-2a_1a_2b_1b_2\geqslant 0\end{aligned}$$

En d'autres termes, $\left({a_1}^2+{a_2}^2\right)\times\left({b_1}^2+{b_2}^2\right)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$, c'est-à-dire $\boxed{P(2)\text{ est vraie.}}$

3) On a tout d'abord

$$\sum_{i=1}^{n+1}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+a_{n+1}b_{n+1}.$$

Or, par hypothèse de récurrence,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2\right)$$

La racine carrée étant une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2},$$

ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n+1}a_ib_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2}+a_{n+1}b_{n+1}.}$$

4) Suivons l'indication de l'énoncé et appliquons $P(2)$ avec

$$\alpha_1=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2},\qquad\beta_1=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2},\qquad\alpha_2=a_{n+1}\qquad\text{et}\qquad\beta_2=b_{n+1}.$$

Nous avons $(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2\leqslant\left({\alpha_1}^2+{\alpha_2}^2\right)\times\left({\beta_1}^2+{\beta_2}^2\right)$, c'est-à-dire

$$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2}+a_{n+1}b_{n+1}\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n+1}{a_i}^2\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n+1}{b_i}^2\right).$$

De plus, d'après la question précédente, et puisque la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2}\times\sqrt{\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2}+a_{n+1}b_{n+1}\right)^2.$$

Il y a ici une erreur d'énoncé... en effet les réels a_i et b_i, $i\in[\![1,n]\!]$, ne sont pas positifs donc on ne connait pas le signe des deux membres. Ainsi on ne peut pas élever au carré. Il aurait fallu supposer dès le départ que tous les réels sont positifs et en déduire le cas général en utilisant l'inégalité triangulaire. En effet on aurait

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\left(\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}{b_i}^2\right).$$

Cela a été pris en compte dans la correction.

On reprend le cours de la question : les deux dernières inégalité donnent finalement

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n+1}{a_i}^2\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n+1}{b_i}^2\right)$$

c'est-à-dire que $\boxed{P(n+1)\text{ est vraie.}}$

5) La propriété P est initialisée et héréditaire. Ainsi, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$. $\boxed{\text{L'inégalité de Cauchy-Schwarz est démontrée.}}$

Ce n'est pas la preuve la plus classique de l'inégalité de Cauchy-Schwarz... que nous avons vu en TD.

Partie B : inégalité de Hardy

1) a) À gauche, on veut avoir $a_i \times b_i$ et à droite, ${a_i}^2$ et ${b_i}^2$: il suffit donc d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $a_i = i/\sqrt{x_i}$ et $b_i = \sqrt{x_i}$:

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{x_i}\right) \times \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right).}$$

b) Puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, on obtient $\displaystyle\frac{k^2(k+1)^2}{4} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{x_i}\right) \times \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)$. Ainsi

$$\boxed{\frac{k}{x_1 + \cdots + x_k} = \frac{k}{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i} \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2} \times \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{x_i}.}$$

c) En sommant cette dernière inégalité pour k allant de 1 à n, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x_1 + \cdots + x_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2} \times \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{x_i} = 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{2}{k(k+1)^2} \frac{i^2}{x_i}.$$

On a une somme double. On l'intervertit et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{2}{k(k+1)^2} \frac{i^2}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2} \frac{i^2}{x_i} = 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{x_i} \sum_{k=i}^{n} \frac{2}{k(k+1)^2}.$$

On a donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x_1 + \cdots + x_k} \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{x_i} \times \sum_{k=i}^{n} \frac{2}{k(k+1)^2}.}$$

2) Il suffit de mettre au même dénominateur. Après calculs : $\boxed{\displaystyle\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{2}{k(k+1)^2} = \frac{1}{k^2(k+1)^2} > 0.}$

3) C'est une somme télescopique : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=i}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{i^2}.}$

4) La question 2 nous assure que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$. Par somme et d'après la question 3, on obtient

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \sum_{k=i}^{n} \frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=i}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \leqslant \frac{1}{i^2}.$$

Nous en déduisons que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{x_i} \times \sum_{k=i}^{n} \frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{x_i} \times \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

Il découle alors de la question 1c que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x_1 + \cdots + x_k} \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.}$$