Devoir surveillé n° 1

29 septembre 2018

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Le devoir est volontairement long et il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet. Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. Encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.

Pour vous aider à tracer des courbes dans l'exercice 2, je vous rappelle quelques approximations :

$$\sqrt{2} \approx 1,41 \qquad \sqrt{3} \approx 1,73 \qquad \ln(2) \approx 0,69 \qquad \ln(3) \approx 1,10 \qquad e \approx 2,72 \qquad e^{-1} \approx 0,37.$$

Exercice 1 : Questions en vrac

1) **Question de cours.** Énoncer et démontrer (par le calcul) la formule du triangle de Pascal.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k+1} (-2)^k$.

3) Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min(i, j)$.

4) Résoudre l'inéquation $4 - x + \sqrt{2x - 5} > 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

5) a) Justifier que la fonction $h : x \longmapsto \sqrt[5]{1 - \cos^3(x)}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \backslash a\mathbb{Z}$, où a est un réel à préciser.

   b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash a\mathbb{Z}$, $h'(x)$ a le signe de $\sin(x)$.

6) La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ est définie sur $\mathbb{R}$ (*on ne demande pas de le montrer*). En utilisant la *technique de la quantité conjuguée*, montrer que la courbe représentative de g admet la droite d'équation $y = x - 1$ pour asymptote en $+\infty$.

Exercice 2 : Équation $x^y = y^x$

Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des réels vérifiant $0 < x < y$.

On dit qu'un couple de réels (x, y) est solution de (E) lorsque $0 < x < y$ et $x^y = y^x$.

Partie A : quelques cas particuliers

1) Quel est l'ensemble des réels y tels que $(1, y)$ est solutions de (E) ?

2) a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 5$, $2^n > n^2$.

   b) En déduire l'ensemble des **entiers** y tels que $(2, y)$ est solutions de (E).

3) Soit $u \in]1, +\infty[$. Posons $x = u^{1/(u-1)}$ et $y = u^{u/(u-1)}$.

   a) Vérifier que $x^u = ux = y$.

   b) En déduire que (x, y) est solution de (E).

   c) En choisissant judicieusement le réel u, monter que $\sqrt{3}^{\sqrt{27}} = \sqrt{27}^{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire que $(\sqrt{3}, \sqrt{27})$ est solution de (E).

Partie B : le cas général

Introduisons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

1) Soient x et y des réels strictement positifs. Montrer que $x^y = y^x$ si et seulement si $f(x) = f(y)$.

2) a) Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculer la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   Traduire ces limites en termes d'asymptotes à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.

   c) Construire le tableau de variations de f.

   d) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1.

   e) Tracer **soigneusement** $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé.
   On s'aidera des approximations données au début de l'énoncé et on tracera aussi les tangentes à $\mathscr{C}_f$ en 1 et en e.

3) En déduire $f(]0, e])$ et $f([e, +\infty[)$. Quels réels admettent exactement deux antécédents par f ?
On pourra s'aider du tableau de variations mais on citera le nom du théorème employé ainsi que les hypothèses requises.

4) a) Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. Combien y a-t-il de réels y tels que (x, y) est solution de (E).

   b) Déterminer l'ensemble des couples d'**entiers** (x, y) qui sont solutions de (E).
   On utilisera notamment la question 2b de la partie A.

5) Qui est le plus grand entre e^π et π^e ?

Exercice 3 : Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Hardy

Partie A : inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ la propriété suivante :

Si $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ sont des réels, alors $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} {a_i}^2\right) \times \left(\sum\limits_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)$.

Le but de cette partie est de montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie. Ce résultat est appelé l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1) Justifier rapidement que $P(1)$ est vraie.

2) Soient a_1, a_2, b_1, b_2 des réels.

   a) Donner le signe de ${a_2}^2{b_1}^2 + {a_1}^2{b_2}^2 - 2a_1a_2b_1b_2$.

   b) En déduire que $P(2)$ est vraie.

On se donne dans la suite de cette partie un entier $n \geqslant 2$ quelconque et on suppose que $P(n)$ est vraie. On se donne également $a_1, \dots, a_{n+1}$ et $b_1, \dots, b_{n+1}$ des réels.

3) Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2} + a_{n+1}b_{n+1}.$$

4) Montrer que $P(n+1)$ est vraie.
On pourra appliquer la propriété $P(2)$ à des réels $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ judicieusement choisis.

5) Conclure.

Partie B : inégalité de Hardy

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne dans cette partie $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes, et la question 4 dépend des trois questions précédentes.

1) a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (appliquée à des réels $a_1, \ldots, a_k$ et $b_1, \ldots, b_k$ que l'on explicitera) montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{x_i}\right) \times \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right).$$

b) En déduire que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\quad \dfrac{k}{x_1 + \cdots + x_k} \leq \dfrac{4}{k(k+1)^2} \times \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{x_i}.$

c) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x_1 + \cdots + x_n} \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{x_i} \sum_{i=k}^{n} \frac{2}{k(k+1)^2}.$$

2) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Donner le signe de $\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2} - \dfrac{2}{k(k+1)^2}$.

3) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=i}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \leq \frac{1}{i^2}$.

4) Déduire des trois questions précédentes l'inégalité de Hardy :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x_1 + \cdots + x_k} \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$