Correction du DM n° 9

Exercice 1 : Intégrales de Wallis et intégrales Gaussiennes

Partie A : Premières propriétés des intégrales de Wallis

Commençons par préciser que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \longmapsto \sin^n(t)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ si bien que l'intégrale W_n existe.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$ ($x = 0$ quand $t = \pi/2$ et $x = \pi/2$ quand $t = 0$). On a « $dt = -dx$ » et donc

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx = W_n.}$$

2) On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \boxed{\frac{\pi}{2}}$ et

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) = \boxed{1}.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \longmapsto \sin^n(t)$ est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et n'est pas identiquement nulle si bien que $\boxed{W_n > 0}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Faisons une intégration par parties avec $u = \sin^n$ et $v = -\cos$ de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a $u' = n\cos\sin^{n-1}$ et $v' = \sin$ et

$$W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)v'(t)\,dt = [-\sin^n(t)\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -n\cos^2(t)\,\sin^{n-1}(t)\,dt.$$

Puisque $\cos^2 = 1 - \sin^2$, on obtient

$$W_{n+1} = -\sin^n\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin^n(0)\cos(0) + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n-1}(t) - \sin^{n+1}(t)\right)dt = nW_{n-1} - nW_{n+1},$$

par linéarité de l'intégrale. Par conséquent $\boxed{(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}.}$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{W_{2n+2}}{W_{2n}} = \dfrac{W_{(2n+1)+1}}{W_{(2n+1)-1}} = \dfrac{2n+1}{2n+2}$ donc, par produit télescopique,

$$\frac{W_{2n}}{W_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{W_{2k+2}}{W_{2k}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)} = \frac{1}{2^n n!}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1).$$

Le produit ci-dessus est le produit de tous les termes impairs de 1 à $2n-1$. Si on le multiplie par le produit des termes pairs, c'est-à-dire $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n n!$, alors on obtient $(2n)!$. Ainsi $\dfrac{W_{2n}}{W_0} = \dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{(2n)!}{2^n n!} = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$

et donc $\boxed{W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}}$ puisque $W_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{W_{2n+3}}{W_{2n+1}} = \dfrac{W_{(2n+2)+1}}{W_{(2n+2)-1}} = \dfrac{2n+2}{2n+3}$ donc, de même,

$$\frac{W_{2n+1}}{W_1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{W_{2k+3}}{W_{2k+1}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+2}{2k+3} = 2^n n! \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} = (2^n n!)^2 \prod_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

et donc $\boxed{W_{2n+1} = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}}$ puisque $W_1 = 1$.

Partie B : Étude asymptotique des intégrales de Wallis

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(\theta) \in [0,1]$ donc $\sin^n(\theta) \geqslant \sin^{n+1}(\theta)$. Ainsi

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t)\, dt = W_{n+1}.$$

Ainsi $\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

b) La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0). Le théorème de la limite monotone entraîne alors que $\boxed{(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la question 4a de la partie A entraîne que

$$(n+1)W_{n+1}W_n = (n+1)\frac{n}{n+1}W_{n-1}W_n = nW_nW_{n+1}.$$

Ainsi la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante. Par ailleurs son terme initial est $W_1W_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi

$\boxed{(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est constante égale à } \dfrac{\pi}{2}.}$

b) La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$. Ainsi $\dfrac{W_{n+1}}{W_{n-1}} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$ et donc $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$. Puisque $\dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, le théorème d'encadrement entraîne que $\boxed{\dfrac{W_n}{W_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(\sqrt{n}W_n)^2 = nW_n^2 = nW_nW_{n-1}\,\frac{W_n}{W_{n-1}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{W_n}{W_{n-1}}.$$

Ainsi $(\sqrt{n}W_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ et donc $\boxed{\sqrt{n}\,W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.}$

Par produit de limites, nous obtenons $\boxed{W_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{n}W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times \dfrac{\pi}{2} = 0.}$

4) On a $\dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Or

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\,\frac{2\,4^n(n!)^2}{\pi(2n)!} = \frac{2n}{\pi(2n+1)}\,\frac{1}{n}\left(\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\right)^2.$$

Puisque $\dfrac{\pi(2n+1)}{2n}\dfrac{W_{2n+1}}{W_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi$, nous en déduisons que $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi$. Puisque la fonction racine carrée est continue en π, nous en déduisons que

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}.}$$

1) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2 e^{1/\sqrt{t}}}$ est continue sur $[1,4]$ donc son intégrale est bien définie. Effectuons le changement de variable $t = \dfrac{1}{u^2}$. La fonction $u \longmapsto \dfrac{1}{u^2}$ est de classe C^1 sur $[1/2,1]$ ($u = 1/2$ quand $t = 3$ et $u = 1$ quand $t = 1$). On a $dt = \dfrac{-2}{u^3}\,du$ » donc

$$\int_1^4 \frac{dt}{t^2 e^{1/\sqrt{t}}} = \int_1^{1/2} \frac{1}{(\frac{1}{u^2})^2 e^u} \frac{-2}{u^3}\,du = -2\int_1^{1/2} ue^{-u}\,du = 2\int_{1/2}^1 ue^{-u}\,du.$$

Faisons une intégration par parties avec les fonctions $f : u \longmapsto -e^{-u}$ et $g : u \longmapsto u$ de classe C^1 sur $[1/2,1]$. On a $f' : u \longmapsto e^{-u}$ et $g' : u \longmapsto 1$ et

$$\int_{1/2}^1 ue^{-u}\,du = \left[-ue^{-u}\right]_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 -e^{-u}\,du = -e^{-1} + \frac{e^{-1/2}}{2} + \left[-e^{-u}\right]_{1/2}^1 = -\frac{2}{e} + \frac{3}{2}e^{-1/2}.$$

Ainsi

$$\boxed{\int_1^4 \frac{dt}{t^2 e^{1/\sqrt{t}}} = -\frac{4}{e} + \frac{3}{\sqrt{e}}.}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n+k}} = \frac{n}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right),$$

avec $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ fonction de classe C^1 sur $[0,1]$. Le théorème de convergence des sommes de Riemann entraîne alors que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n+k}} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) dx \\
&= \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - 2\sqrt{1+x}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}(2^{3/2}-1) - 2(\sqrt{2}-1) = \boxed{\frac{2(2-\sqrt{2})}{3}.}
\end{aligned}$$

Exercice 3 : Une équation fonctionnelle

1) Soit $c \in \mathbb{R}$. Si f est une fonction constante égale à c vérifiant $(*)$, alors $c = \dfrac{2c}{1+c^2}$ donc $c = 0$ ou $1+c^2 = 2$ et donc $c \in \{-1,0,1\}$. Réciproquement, on vérifie que les fonctions constantes égales à -1, à 0 ou à 1 sont solutions.

2) Supposons qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(y_0) = 1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x - y_0 + y_0) = \frac{f(x-y_0) + f(y_0)}{1 + f(x-y_0)f(y_0)} = \frac{f(x-y_0)+1}{1+f(x-y_0)} = 1.$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est constante égale à } 1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(z_0) = -1$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x - z_0 + z_0) = \frac{f(x-z_0) + f(z_0)}{1 + f(x-z_0)f(z_0)} = \frac{f(x-z_0)-1}{1-f(x-z_0)} = -1.$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est constante égale à } -1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

3) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + f^2\left(\frac{x}{2}\right)}. \qquad (**)$$

donc

$$1 - |f(x)| = \frac{1 + f^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{1 + f^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\left(1 - \left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|^2\right)}{1 + f^2\left(\frac{x}{2}\right)} \geqslant 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'inégalité n'est pas stricte. Il existe alors $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| = 1$. Ainsi $1 - |f(x_0)| = 0$ et donc $1 - \left|f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right| = 0$. Il s'ensuit que f prends la valeur 1 ou -1 et donc f est constant, ce qui est absurde. Ainsi $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ |f(x)| < 1.}$

b) On a $f(0) = f(0+0) = \dfrac{f(0) + f(0)}{1 + f^2(0)}$ donc $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$. Puisque f ne peut pas prendre les valeurs 1 et -1, on a donc $\boxed{f(0) = 0.}$

4) a) Fixons $x \in \mathbb{R}$. La fonction $y \longmapsto f(x+y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse. Dérivons-là :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad f'(x+y) = \frac{f'(y)\big(1 + f(x)f(y)\big) - f'(y)f(x)\big(f(x) + f(y)\big)}{\big(1 + f(x)f(y)\big)^2} = \frac{f'(y) - f'(y)f^2(x)}{\big(1 + f(x)f(y)\big)^2}.$$

En particulier, pour $y = 0$, on obtient $\boxed{f'(x) = \dfrac{f'(0) - f'(0)f^2(x)}{\big(1 + f(x)f(0)\big)^2} = c(1 - f^2(x)), \text{ avec } c = f'(0).}$

b) Nous obtenons également que $\boxed{c \neq 0}$ sinon f' serait nulle sur $\mathbb{R}$ et donc f serait constante (ce qui est exclu).

5) a) Puisque $c \neq 0$ et $|f(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous en déduisons que f' est strictement positive ou strictement négative (selon le signe de c) sur $\mathbb{R}$. La fonction f est bornée et, comme elle est monotone, le théorème de la limite monotone entraîne que $\boxed{f \text{ admet une limite finie } \ell \text{ en } -\infty \text{ et une limite finie } \ell' \text{ en } +\infty.}$ En faisant tendre x vers $-\infty$ ou $+\infty$ dans $(**)$ on obtient que $\ell \in \{-1, 0, 1\}$ et $\ell' \in \{-1, 0, 1\}$. Puisque $f(0) = 0$ et que f est strictement monotone, nous obtenons que $\boxed{\ell = -\ell' = 1 \text{ ou } \ell' = -\ell = 1.}$

b) La fonction f est strictement monotone. De plus f est continue (car dérivable) donc, d'après le théorème de la bijection, $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur l'intervalle } f(\mathbb{R}) =]-1, 1[.}$

c) La fonction f est dérivable et sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Nous en déduisons que f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$ et que

$$\boxed{\forall y \in]-1, 1[, \qquad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{c\big(1 - f^2(f^{-1}(y))\big)} = \frac{1}{c(1 - y^2)}.}$$

6) a) La fonction g est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$\boxed{\forall y \in]-1, 1[, \qquad g'(y) = \frac{1}{1+y} - \frac{-1}{1-y} = \frac{2}{1-y^2}.}$$

b) Nous remarquons que $(f^{-1})' = \dfrac{1}{2c}g'$ donc $(f^{-1} - \dfrac{1}{2c}g)' = 0$. Ainsi $f^{-1} - \dfrac{1}{2c}g$ est constante sur $]-1, 1[$. Puisque $g(0) = f^{-1}(0) = 0$ nous obtenons que $f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2c}g$ sur $]-1, 1[$. Ainsi

$$\boxed{\forall y \in]-1, 1[, \qquad f^{-1}(y) = \frac{1}{2c}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \,]-1,1[$. On a

$$\begin{aligned}
x = f^{-1}(y) \qquad &\iff \qquad 2cx = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \qquad \iff \qquad e^{2cx} = \frac{1+y}{1-y} \\
&\iff \qquad e^{2cx}(1-y) = 1+y \\
&\iff \qquad e^{2cx} - 1 = y(1+e^{2cx}) \\
&\iff \qquad y = \frac{e^{2cx}+1}{e^{2cx}+1} = \frac{e^{cx}-e^{-cx}}{e^{cx}+e^{-cx}}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^{cx}-e^{-cx}}{e^{cx}+e^{-cx}}.}$

7) Réciproquement cette dernière fonction est dérivable et elle vérifie $(*)$. En effet (c'est fastidieux) :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)} &= \frac{\dfrac{e^{cx}-e^{-cx}}{e^{cx}+e^{-cx}} + \dfrac{e^{cy}-e^{-cy}}{e^{cy}+e^{-cy}}}{1 + \dfrac{e^{cx}-e^{-cx}}{e^{cx}+e^{-cx}}\dfrac{e^{cy}-e^{-cy}}{e^{cy}+e^{-cy}}} = \frac{(e^{cx}-e^{-cx})(e^{cy}+e^{-cy}) + (e^{cy}-e^{-cy})(e^{cx}+e^{-cx})}{(e^{cx}+e^{-cx})(e^{cy}+e^{-cy}) + (e^{cx}-e^{-cx})(e^{cy}-e^{-cy})} \\
&= \frac{e^{c(x+y)} + e^{c(x-y)} - e^{-c(x-y)} - e^{-c(x+y)} + e^{c(x+y)} + e^{-c(x-y)} - e^{c(x-y)} - e^{-c(x+y)}}{e^{c(x+y)} + e^{c(x-y)} + e^{-c(x-y)} + e^{-c(x+y)} + e^{c(x+y)} - e^{c(x-y)} - e^{-c(x-y)} + e^{-c(x+y)}} \\
&= \frac{2e^{c(x+y)} - 2e^{-c(x+y)}}{2e^{c(x+y)} + 2e^{-c(x+y)}} = \frac{e^{c(x+y)} - e^{-c(x+y)}}{e^{c(x+y)} + e^{-c(x+y)}} = f(x+y)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que les solutions au problème sont les fonctions constantes égales à -1 ou à 1 ainsi que les fonctions

$$x \longmapsto \frac{e^{cx}-e^{-cx}}{e^{cx}+e^{-cx}}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$