Devoir maison n° 9

À rendre le jeudi 20 décembre 2018

Exercice 1 : Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$.

Partie A : Premières propriétés des intégrales de Wallis

1) En effectuant un changement de variable, montrer que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt = W_n.$$
2) Calculer W_0 et W_1.
3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.
4) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}.$$
5) A l'aide de produits télescopiques, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$W_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \qquad \text{et} \qquad W_{2n+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Partie B : Étude asymptotique des intégrales de Wallis

1) a) Étudier les variations de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) En déduire que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2) Déduire des questions précédentes (et de la question 4 de la partie A) que :
   a) la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante (on précisera la constante).
   b) $\dfrac{W_n}{W_{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (*on utilisera la monotonie de* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
3) En déduire que
$$\sqrt{n}\,W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad \text{et} \qquad W_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
4) Montrer enfin la formule de Wallis :
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}.$$

WALLIS INTEGRALS WILL RETURN.

Exercice 2 : Intégrales en vrac

1) A l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1}{u^2}$ puis d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{t^2 e^{1/\sqrt{t}}}$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n+k}}$.

Exercice 3 : Une équation fonctionnelle

Exercice 11 du TD nº 13.

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x)f(y) \neq -1 \qquad \text{et} \qquad f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}. \qquad (*)$$

1) Déterminer toutes les fonctions constantes f vérifiant $(*)$.

2) Montrer qu'une fonction vérifiant $(*)$ et prenant la valeur 1 ou la valeur -1 en un certain point est constante.

On suppose dans la suite de l'exercice que f est une fonction dérivable non constante qui vérifie $(*)$.

3) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < 1$.
   b) Calculer $f(0)$.

4) a) Notons $c = f'(0)$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = c\left(1 - f(x)^2\right).$$

   On dérivera la fonction $y \longmapsto f(x+y)$ à x fixé.
   b) En déduire que $c \neq 0$.

5) a) Justifier que f admet des limites en $+\infty$ et $-\infty$ que l'on précisera selon le signe de c.
   b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
   c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée.

6) a) Calculer la dérivée de $g : y \in]-1,1[\longmapsto \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.
   b) En déduire, pour tout $y \in]-1,1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ en fonction de y et c.
   c) Montrer enfin que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{cx} - e^{-cx}}{e^{cx} + e^{-cx}}$.

7) On vérifie par le calcul (on ne demande pas de le faire) que cette fonction est bien solution au problème. Déterminer alors l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles vérifiant $(*)$.