Correction du DM n° 8

Exercice 1 : Une équation fonctionnelle

1) Par hypothèse, il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(y_0) \neq 0$. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(-x) = \frac{f\left(\sqrt{(-x)^2 + y^2}\right)}{f(y_0)} = f(x).$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est paire.}}$

2) Supposons que $f(0) = 0$. Alors (en prenant $y = 0$) on a $f(x) = f(\sqrt{x^2 + 0^2}) = f(x)f(y) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Ainsi f est nulle sur $\mathbb{R}_+$ et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier par parité. Nous avons exclu ce cas. Ainsi $f(0) \neq 0$. Ensuite $f(0) = f(\sqrt{0^2 + 0^2}) = f(0)f(0)$ donc $\boxed{f(0) = 1.}$

3) Supposons que f s'annule en un point $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{x_0}{\sqrt{2^n}}$.

   a) Commençons par remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(\sqrt{2}x) = f(\sqrt{2x^2}) = f(\sqrt{x^2 + x^2}) = f(x)^2$. Procédons ensuite par récurrence sur n. L'initialisation est immédiate puisque $f(x_0) = 0$. Supposons que $f(u_n) = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$f(u_{n+1})^2 = f(\sqrt{2}u_{n+1}) = f\left(\sqrt{2}\frac{x_0}{\sqrt{2 \cdot 2^n}}\right) = f(u_n) = 0.$$

   Ainsi $f(u_{n+1}) = 0$. Par récurrence, nous obtenons que $\boxed{f(u_n) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_0 \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$. Comme $\left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$ on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Puisque f est continue en 0, nous obtenons que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(0)$ et donc, par unicité de la limite, $\boxed{f(0) = 0.}$ C'est absurde. Ainsi $\boxed{f \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}_+.}$

4) *Première méthode :* La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule pas. Par conséquent, elle est strictement positive ou bien strictement négative sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $f(0) = 1 > 0$, nous en déduisons que $\boxed{f \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}_+.}$

   Deuxième méthode : On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \left(f\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 \geqslant 0$. Et puisque f ne s'annule pas, on en déduit que $\boxed{f \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}_+.}$

5) a) La fonction $\boxed{g \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+}$ car :
   - $t \longmapsto \sqrt{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
   - f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$,
   - $\ln$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$. On a

$$g(x+y) = \ln\left(f(\sqrt{x+y})\right) = \ln\left(f\left(\sqrt{\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2}\right)\right) = \ln\left(f\left(\sqrt{x}\right) f\left(\sqrt{y}\right)\right)$$

   et donc $\boxed{g(x+y) = \ln\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right) + \ln\left(f\left(\sqrt{y}\right)\right) = g(x) + g(y).}$

   c) D'après l'exercice 9 du TD n° 11, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = ax$ et donc $f(\sqrt{x}) = e^{g(x)} = e^{ax}$. Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = f(\sqrt{x^2}) = e^{ax^2}.$$

   Puisque f est paire, nous en déduisons que $\boxed{f(x) = e^{ax^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$

6) Réciproquement, si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax^2}$, alors f est bien continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = e^{a(x^2+y^2)} = e^{ax^2}e^{ay^2} = f(x)f(y).$$

Ainsi f est bien solution au problème.

Nous en déduisons que :

$\boxed{\text{l'ensemble des solutions au problème est constitué de la fonction constante égale à } 0 \text{ et des fonctions de la forme } x \longmapsto e^{ax^2}\text{, où } a \in \mathbb{R}.}$

Exercice 2 : Étude d'une suite récurrente

1) Pour tout $x \in [0,1]$, $2 + x \neq 0$. Par conséquent la fonction f est dérivable sur $[0,1]$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$f'(x) = \frac{e^x(2+x) - e^x}{(2+x)^2} = \frac{e^x(1+x)}{(2+x)^2} > 0.$$

Il s'ensuit que la fonction $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0,1].}$ On a $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = \dfrac{e}{3}$.

On a $u_0 = \dfrac{1}{2} \in [0,1]$. Supposons que $u_n \in [0,1]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Nous en déduisons que

$$\frac{1}{2} = f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1) = \frac{e}{3}$$

et donc $u_{n+1} \in [0,1]$. Par récurrence, nous en déduisons que $\boxed{u_n \in [0,1] \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

2) On remarque que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = x$ si et seulement si $g(x) = 0$. La fonction g est deux fois dérivable sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1], \qquad g'(x) = e^x - 2 - 2x \qquad \text{et} \qquad g''(x) = e^x - 2.$$

Nous en déduisons que g' est décroissante sur $[0, \ln(2)]$ et croissante sur $[\ln(2), 1]$. Puisque $g'(0) = -1 < 0$ et $g'(1) = e - 4 < 0$, nous en déduisons que $g' < 0$ sur $[0,1]$ et donc g est strictement décroissante sur $[0,1]$. De plus g est continue et $0 \in [g(1), g(0)] = [e-3, 1]$. Par conséquent le théorème de la bijection entraîne que $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in [0,1] \text{ tel que } g(\alpha) = 0\text{, c'est-à-dire } f(\alpha) = \alpha.}$

3) La fonction f' est dérivable sur $[0,1]$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$f''(x) = \frac{e^x(1+1+x)(2+x)^2 - e^x(1+x)2(2+x)}{(2+x)^4} = \frac{e^x((2+x)^2 - 2(1+x))}{(2+x)^3} = \frac{e^x(x^2+2x+2)}{(2+x)^3} > 0.$$

Ainsi f' est strictement croissante sur $[0,1]$. Nous en déduisons que

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \qquad \frac{1}{4} = f'(0) \leqslant f'(x) \leqslant f'(1) = \frac{2e}{9} \leqslant \frac{2}{3}.}$$

4) a) La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et $|f'| \leqslant \dfrac{2}{3}$ sur $[0,1]$. Par conséquent l'inégalité des accroissements finis entraîne que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{2}{3}|x - y|.$$

En particulier,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \alpha|.}$$

b) Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Puisque $0 < \frac{2}{3} < 1$, nous avons $\left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc, par encadrement, $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$

c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Puisque $|u_0 - \alpha| \leqslant 1$, il suffit de choisir n_p tel que $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant 10^{-p}$ pour tout $n \geqslant n_p$. Or on a

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant 10^{-p} \quad\iff\quad n\ln\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant -p\ln(10) \quad\iff\quad n \geqslant \frac{p\ln(10)}{\ln(3)-\ln(2)},$$

puisque $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(2/3) < 0$. On prend $\boxed{n_p = 1 + \left\lfloor \frac{p\ln(10)}{\ln(3)-\ln(2)} \right\rfloor}$.

5) Et voici le programme demandé :

```
p=input('Entrez un entier naturel non nul :');
n=floor(p*log(10)/log(3/2))+1;
u=1/2;
for   k=1:n
      u=exp(u)/(2+u);
end
disp('Une valeur approchée alpha à 10∧(-'+string(p)+') près est'+string(u)+'.')
```

Exercice 3 : Propriétés des fonctions exponentielle et logarithme népérien

Partie D : Limites, continuité et dérivabilité de φ

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \geqslant 1 + x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$. Donc, par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty.}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\varphi(-x)}$. Par composition de limite, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(-x) = +\infty$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = 0.}$

2) a) Donnons-nous $h \in \,]-1, 1[$. On sait que $1+h \leqslant \varphi(x)$ et $1-h \leqslant \varphi(-h)$ donc $\boxed{1+h \leqslant \varphi(h) \leqslant \frac{1}{1-h}}$.

b) En faisant tendre h vers 0, on obtient que $\varphi(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1 = \varphi(0)$. Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est continue en } 0.}$

c) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a $x - x_0 \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$ donc $\varphi(x-x_0) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1$ et donc

$$\varphi(x) = \varphi(x_0 + (x-x_0)) = \varphi(x_0)\varphi(x-x_0) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \varphi(x_0)$$

Ainsi φ est continue en x_0. Nous en déduisons que $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

3) a) Pour tout $h \in \,]0, 1[$, $1 \leqslant \frac{\varphi(h)-1}{h} \leqslant \frac{1}{h}\left(\frac{1}{1-h} - 1\right) = \frac{1}{1-h}$. De même, pour tout $h \in \,]-1, 0[$, $\frac{1}{1-h} \leqslant \frac{\varphi(x)-1}{h} \leqslant 1$. En faisant tendre h vers 0, on obtient que $\boxed{\frac{\varphi(h)-1}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1.}$

b) On a $\frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h-0} = \frac{\varphi(h)-1}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc $\boxed{\varphi \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } \varphi'(0) = 1.}$

c) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h} = \frac{\varphi(x_0)\varphi(h)-\varphi(x_0)}{h} = \varphi(x_0)\frac{\varphi(h)-1}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \varphi(x_0).$$

Ainsi φ est dérivable en x_0 et $\varphi'(x_0) = \varphi(x_0)$. Nous en déduisons que $\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et que } \varphi' = \varphi.}$

d) Puisque φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que la fonction $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) = \frac{f'(x)\varphi(x) - f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = \frac{f(x)\varphi(x) - f(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x)} = 0.$$

Ainsi la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $g(0) = f(0)/\varphi(0) = 1$. Par conséquent $\boxed{f(x) = \varphi(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$

Partie E : La réciproque de φ

1) La fonction φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$, le théorème de la bijection entraîne que $\boxed{\varphi \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*.}$

2) On a $\varphi(0) = 1$ donc $\boxed{\psi(1) = 0}$. Le théorème de la bijection entraîne aussi que ψ, la bijection réciproque de φ, est $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}_+^*}$ et $\boxed{\text{strictement croissance sur } \mathbb{R}_+^*}$ et que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0^+} \psi(x) = -\infty.}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $1 + x \leqslant \varphi(x)$ et ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent $\boxed{\psi(1 + x) \leqslant \psi(\varphi(x)) = x.}$

4) Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a Nous avons

$$\varphi\big(\psi(x) - \psi(y)\big) = \varphi(\psi(x))\varphi(\psi(y)) = xy = \varphi(\psi(xy))$$

donc, par injectivité de φ, $\boxed{\psi(xy) = \psi(x) + \psi(y)}$. Ensuite

$$\varphi(-\psi(x)) = \frac{1}{\varphi(\psi(x))} = \frac{1}{x} = \varphi\left(\psi\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

donc, par injectivité de φ, $\boxed{\psi\left(\frac{1}{x}\right) = -\psi(x).}$ Nous en déduisons que

$$\boxed{\psi\left(\frac{x}{y}\right) = \psi(x) + \psi\left(\frac{1}{y}\right) = \psi(x) - \psi(y).}$$

Enfin, si $n \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi(n\psi(x)) = \varphi(\psi(x))^n = x^n = \varphi(\psi(x^n))$$

donc, par injectivité de φ, $\boxed{\psi(x^n) = n\psi(x).}$

5) a) Puisque φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que φ' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on obtient que $\boxed{\psi \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$ et que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \psi'(x) = \left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{1}{\varphi(\varphi^{-1}(x))} = \frac{1}{x}.}$$

b) Puisque ψ est dérivable en 1, nous avons

$$\boxed{\frac{\psi(x)}{x-1} = \frac{\psi(x) - \psi(1)}{x - 1} \underset{x\to1}{\longrightarrow} \psi'(1) = \tfrac{1}{1} = 1.}$$