Devoir maison n° 8

À rendre le lundi 10 décembre 2018

Exercice 1 : Une équation fonctionnelle

Extrait du DS n° 4 (concours blanc du premier semestre) de l'an passé.

Le but de cet exercice est de déterminer les applications **continues** f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f\big(\sqrt{x^2+y^2}\big) = f(x)f(y).$$

On remarque que la fonction nulle est solution. On se donne désormais une solution f non nulle.

1) Montrer que f est paire. On s'intéresse donc à la restriction de f sur $\mathbb{R}_+$.
2) Montrer que si $f(0)=0$, alors la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$. En déduire la valeur de $f(0)$.
3) Le but de cette question est de montrer par l'absurde que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$. Supposons donc que f s'annule en un point $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{x_0}{\sqrt{2^n}}$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$.
   b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire que $f(0)=0$ et conclure.
4) En déduire que f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.
5) On introduit $g : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \ln\big(f(\sqrt{x})\big)$.
   a) Justifier que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   b) Montrer que, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $g(x+y) = g(x)+g(y)$.
   c) *On a montré dans l'exercice 12 du TD n° 11 qu'une telle fonction est linéaire : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = ax$.*
   En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de $f(x)$ en fonction de a et de x.
6) Montrer que toutes les fonctions obtenues sont bien solutions au problème et conclure.

Exercice 2 : Étude d'une suite récurrente

Extrait du DS n° 5 de l'an passé.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{2+u_n}$. Posons $f : x \in [0,1] \longmapsto \dfrac{e^x}{2+x}$.

1) Étudier les variations de la fonction f et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.
2) Montrer que f possède un unique point fixe α sur $[0,1]$.
   On pourra étudier la fonction $g : x \in [0,1] \longmapsto e^x - 2x - x^2$.
3) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$.
4) a) Montrer soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant M|u_n - \alpha|$ où M est un réel à préciser.
   b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
   c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $n_p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_p$, $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-p}$.
5) Écrire un programme Scilab qui demande à l'utilisateur un entier naturel non nul p et qui renvoie une approximation de α à 10^{-p} près.

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > |x|$, posons $u_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ et $v_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.

Précédemment [1], nous avons introduit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x)$ est la limite commune des suites $\big(u_n(x)\big)_{n \geqslant n_x}$ et $\big(v_n(x)\big)_{n \geqslant n_x}$. Nous avons montré qu'elle possédait les propriétés suivantes :

① $\varphi(0) = 1$.

② Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \varphi(x) > 0$.

③ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \varphi(x) \geqslant 1 + x$.

④ Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \varphi(-x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}$ et $\varphi(x-y) = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)}$.

⑤ Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\quad \varphi(nx) = \varphi(x)^n$.

⑥ φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ces propriétés vont jouer un rôle essentiel dans la preuve des propriétés suivantes.

Partie D : Limites, continuité et dérivabilité de φ

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$.

2) a) Montrer que, pour tout $h \in \left]-1, 1\right[$, $1 + h \leqslant \varphi(h) \leqslant \dfrac{1}{1-h}$.

   b) En déduire que φ est continue en 0.

   c) En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

3) a) A l'aide d'un encadrement, montrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varphi(h) - 1}{h} = 1$.

   b) En déduire que φ est dérivable en 0 et préciser $\varphi'(0)$.

   c) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi' = \varphi$.

   d) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Montrer que $f = \varphi$ (*on pourra étudier la fonction* $g = \dfrac{f}{\varphi}$).

Cette dernière propriété signifie que φ (la fonction exponentielle) est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la valeur en 0 est 1 et dont la dérivée est égale à elle-même.

Partie E : La réciproque de φ

1) Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On note ψ sa réciproque.

2) Justifier que $\psi(1) = 0$, que ψ est continue et strictement croissance sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} \psi(x) = -\infty.$$

3) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi(1 + x) \leqslant x$.

4) Montrer que, pour tous $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$\psi(xy) = \psi(x) + \psi(y), \qquad \psi\left(\frac{1}{x}\right) = -\psi(x), \qquad \psi\left(\frac{x}{y}\right) = \psi(x) - \psi(y), \qquad \psi(x^n) = n\psi(x).$$

5) a) Montrer que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.

   b) En déduire que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\psi(x)}{x - 1} = 1$

La fonction ψ s'appelle logarithme népérien et on la note plutôt $\ln$.

1. dans le DM n° 5.