Devoir maison 007

À rendre le jeudi 22 novembre 2018

Exercice 1 : Lancers de boules dans des cases

Extrait du concours blanc du premier semestre de l'an passé.

Soient n et N deux entiers tels que $2 \leqslant N \leqslant n$. Un joueur lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N. On suppose que les n lancers sont indépendants et que chaque boule a pour probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases. On note T_n le nombre de cases occupées après n lancers.

1) Déterminer un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience. Préciser le cardinal de Ω

2) Quelles sont les valeurs prises par T_n ? Justifier brièvement que toutes les valeurs en questions sont prises par T_n avec probabilité non nulle.

3) Déterminer les lois de T_1 et T_2.

4) Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$ et $\mathbb{P}(T_n = 2)$.

5) Montrer rigoureusement que
$$\forall k \in [\![1, N]\!], \qquad \mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\,\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\,\mathbb{P}(T_n = k-1).$$

6) Considérons G_n la fonction polynomiale définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_n(x) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(T_n = k)\, x^k.$$

   a) Quelle est la valeur de $G_n(1)$.

   b) Exprimer $G_n'(1)$ en fonction de $\mathbb{E}(T_n)$.

   c) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(x - x^2)G_n'(x) + xG_n(x).$$

   d) En déduire $\mathbb{E}(T_{n+1})$ en fonction de $E(T_n)$.

   e) Exprimer $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(T_n)$.

Exercice 2 : Loi des tirages avec ou sans remise

Exercice 8 du TD n^o 9.

Soient n, r et N dans $\mathbb{N}^*$ avec $r < N$ et $n \leqslant N$. Une urne contient N boules dont r rouges et $b = N - r$ bleues. On pose $p = \dfrac{r}{N}$.

1) On tire successivement avec remise n boules dans l'urne et on note R le nombre de boules rouges obtenues. Montrer que R suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
On dit que la loi binomiale est la loi des tirages avec remise.

2) Désormais on tire successivement sans remise n boules dans l'urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues.

   a) Donner un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience et déterminer $\mathrm{card}(\Omega)$.

   b) Préciser $X(\Omega)$.

   c) Montrer rigoureusement que

$$\forall k \in X(\Omega), \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\dbinom{pN}{k}\dbinom{(1-p)N}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}.$$

   On dit que X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n et p. On la note $\mathcal{H}(N, n, p)$. On dit aussi que la loi hypergéométrique est la loi des tirages sans remise.

   d) En déduire la formule de Vandermonde :

   Si a et b sont des entiers naturels, alors

$$\forall c \in [\![0, a+b]\!], \qquad \binom{a+b}{c} = \sum_{k=0}^{c} \binom{a}{k}\binom{b}{c-k}.$$

   e) En utilisant la formule de Vandermonde, montrer que $\mathbb{E}(X) = np$.