Correction du DM n° 6

Exercice 1 : Probabilité d'avoir un Yams

1) La famille $(Y_1, C_1, B_1, P_1, A_1)$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. La formule des probabilités totales entraîne que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_2) &= \mathbb{P}_{Y_1}(Y_2)\mathbb{P}(Y_1) + \mathbb{P}_{C_1}(Y_2)\mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}_{B_1}(Y_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{P_1}(Y_2)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}_{A_1}(Y_2)\mathbb{P}(A_1)\\ &= 0 + \frac{1}{6}\frac{150}{6^5} + \frac{1}{6^2}\frac{250}{6^4} + \frac{1}{6^3}\frac{25}{6^2} + \frac{1}{6^4}\frac{20}{6^3} = \boxed{\frac{3320}{6^7}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_2) &= \mathbb{P}_{Y_1}(C_2)\mathbb{P}(Y_1) + \mathbb{P}_{C_1}(C_2)\mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}_{B_1}(C_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{P_1}(C_2)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}_{A_1}(C_2)\mathbb{P}(A_1)\\ &= 0 + \frac{5}{6}\frac{150}{6^5} + \frac{10}{6^2}\frac{250}{6^4} + \frac{15}{6^3}\frac{25}{6^2} + \frac{150}{6^5}\frac{20}{6^3} = \boxed{\frac{33500}{6^7}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}_{Y_1}(B_2)\mathbb{P}(Y_1) + \mathbb{P}_{C_1}(B_2)\mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{P_1}(B_2)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}_{A_1}(B_2)\mathbb{P}(A_1)\\ &= 0 + 0 + \frac{25}{6^2}\frac{150}{6^5} + \frac{80}{6^3}\frac{25}{6^2} + \frac{250}{6^4}\frac{20}{6^3} = \boxed{\frac{114500}{6^7}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P_2) &= \mathbb{P}_{Y_1}(P_2)\mathbb{P}(Y_1) + \mathbb{P}_{C_1}(P_2)\mathbb{P}(C_1) + \mathbb{P}_{B_1}(P_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{P_1}(P_2)\mathbb{P}(P_1) + \mathbb{P}_{A_1}(P_2)\mathbb{P}(A_1)\\ &= 0 + 0 + 0 + \frac{120}{6^3}\frac{25}{6^2} + \frac{25}{6^2}\frac{20}{6^3} = \boxed{\frac{3500}{6^5}}.\end{aligned}$$

Enfin, nous avons $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}(A_1) = \frac{20}{6^3}\frac{20}{6^3} = \boxed{\frac{400}{6^6}}$.

2) La famille $(Y_2, C_2, B_2, P_2, A_2)$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. La formule des probabilités totales entraîne que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_3) &= \mathbb{P}_{Y_2}(Y_3)\mathbb{P}(Y_2) + \mathbb{P}_{C_2}(Y_3)\mathbb{P}(C_2) + \mathbb{P}_{B_2}(Y_3)\mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}_{P_2}(Y_3)\mathbb{P}(P_2) + \mathbb{P}_{A_2}(Y_3)\mathbb{P}(A_2)\\ &= 0 + \frac{1}{6}\frac{33500}{6^7} + \frac{1}{6^2}\frac{114500}{6^7} + \frac{1}{6^3}\frac{3500}{6^5} + \frac{1}{6^4}\frac{400}{6^6} = \boxed{\frac{2019400}{6^{10}}}.\end{aligned}$$

3) Par incompatibilité, la probabilité d'avoir un Yams est donc

$$\mathbb{P}(Y_1) + \mathbb{P}(Y_2) + \mathbb{P}(Y_3) = \frac{1}{6^4} + \frac{3320}{6^7} + \frac{2019400}{6^{10}} = \frac{2783176}{6^{10}} = \boxed{\frac{347897}{7558272}}.$$

On trouve que cette probabilité est environ égale à $0,04603$, c'est-à-dire $4,603\%$

Exercice 2

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $A_n \cup B_n \cup C_n = \Omega$ puisque, à l'étape n, les deux agents sont forcément sur le même site, ou à un couloir de distance ou à deux couloirs de distance. Par ailleurs A_n, B_n et C_n sont bien entendu deux à deux incompatibles. Ainsi $\boxed{\text{la famille } (A_n, B_n, C_n) \text{ est un système complet d'événements.}}$

b) A l'étape 0 les agents se trouvent à un couloir de distance. Ainsi $A_0 = C_0 = \varnothing$ et $B_0 = \Omega$. Ainsi $\boxed{a_0 = c_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1.}$

2) Initialement Wade et Leiter sont respectivement en (S_1) et (S_2). Par conséquent à l'étape suivante ils se trouvent :

- ou bien en (S_2) et en (S_1) si $W_1 \cap L_1$ est réalisé,
- ou bien en (S_2) et en (S_3) si $W_1 \cap \overline{L}_1$ est réalisé,
- ou bien en (S_5) et en (S_1) si $\overline{W}_1 \cap L_1$ est réalisé,
- ou bien en (S_5) et en (S_3) si $\overline{W}_1 \cap \overline{L}_1$ est réalisé.

a) La seule configuration pour laquelle les deux agents se trouvent à deux couloirs de distance est la dernière de la liste. On a donc $\boxed{C_1 = \overline{W}_1 \cap \overline{L}_1.}$ Nous en déduisons que $c_1 = \mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(\overline{W}_1 \cap \overline{L}_1)$. Par indépendance, on a $c_1 = \mathbb{P}(\overline{W}_1)\mathbb{P}(\overline{L}_1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$.

b) Dans la liste précédente, les trois premières configurations placent les deux agents à un seul couloir de distance. Ainsi $\boxed{B_1 = (W_1 \cap L_1) \cup (W_1 \cap \overline{L}_1) \cup (\overline{W}_1 \cap L_1).}$ Ces trois événements sont deux à deux incompatibles donc

$$b_1 = \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(W_1 \cap L_1) + \mathbb{P}(W_1 \cap \overline{L}_1) + \mathbb{P}(\overline{W}_1 \cap L_1).$$

Par indépendance, on obtient que

$$b_1 = \mathbb{P}(W_1)\mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}(W_1)\mathbb{P}(\overline{L}_1) + \mathbb{P}(\overline{W}_1)\mathbb{P}(L_1) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

c) Puisque (A_1, B_1, C_1) est un système complet d'événements, $\boxed{a_1 = 1 - b_1 - c_1 = 0.}$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\overline{L}_1 \cap \overline{W}_1$ est réalisé, alors ils se retrouvent à deux couloirs de distances à l'issue de l'étape 1. Ensuite, si $\bigcap_{k=2}^{n} (L_k \cap \overline{W}_k)$ est réalisé, cela signifie que les deux agents se déplacent dans le même sens lors des étapes 2 à n si bien que leur distance ne change pas. Ainsi la réalisation de $(\overline{L}_1 \cap \overline{W}_1) \cap \bigcap_{k=2}^{n} (L_k \cap \overline{W}_k)$ entraîne que les deux agents sont à deux couloirs de distances à l'issue de l'étape n. Ainsi $\boxed{(\overline{L}_1 \cap \overline{W}_1) \cap \bigcap_{k=2}^{n} (L_k \cap \overline{W}_k) \subset C_n}$ Nous en déduisons que

$$c_n = \mathbb{P}(C_n) \geqslant \mathbb{P}\left((\overline{L}_1 \cap \overline{W}_1) \cap \bigcap_{k=2}^{n} (L_k \cap \overline{W}_k) \right) = \mathbb{P}(\overline{L}_1)\mathbb{P}(\overline{W}_1) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(L_k)\mathbb{P}(\overline{W}_k) = \frac{1}{4} \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{4},$$

par indépendance. Ainsi $\boxed{c_n \geqslant \frac{1}{4^n}.}$

b) Si l'agent Leiter ne fait que se rapprocher tandis que Wade s'éloigne durant les n premiers déplacements, alors leur distance reste inchangée à l'issue du $n^{\text{ème}}$ déplacement. Ainsi $\bigcap_{k=1}^{n} (L_k \cap \overline{W}_k) \subset B_n$. Par indépendance,

$$b_n = \mathbb{P}(B_n) \geqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (L_k \cap \overline{W}_k) \right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(L_k)\mathbb{P}(\overline{W}_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{4}.$$

Ainsi $\boxed{b_n \geqslant \frac{1}{4^n}.}$

c) Si C_1 n'est pas réalisé alors B_1 l'est et les deux agents se retrouvent à un couloir de distance à l'issue de la première étape, si bien qu'ils ne pourront pas se retrouver à l'issue de la deuxième suivante. Par conséquent la réalisation de C_1 est nécessaire pour que A_2 soit réalisée. Ensuite, si C_1 est réalisé alors A_2 est réalisé si et seulement si les deux agents se rapprochent, c'est-à-dire $L_2 \cap W_2$ est réalisé. Nous en déduisons que $\boxed{A_2 = C_1 \cap L_2 \cap W_2 = \overline{L}_1 \cap \overline{W}_1 \cap L_2 \cap W_2}$.

Si $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, alors $A_2 \subset A_n$ et donc

$$a_n = \mathbb{P}(A_n) \geqslant \mathbb{P}(A_2) \geqslant \mathbb{P}(\overline{L}_1 \cap \overline{W}_1 \cap L_2 \cap W_2) = \mathbb{P}(\overline{L}_1)\mathbb{P}(\overline{W}_1)\mathbb{P}(L_2)\mathbb{P}(W_2) = \frac{1}{16},$$

par indépendance de $\overline{L}_1$, $\overline{W}_1$, L_2 et W_2. On a bien $\boxed{a_n \geqslant \frac{1}{16}.}$

4) Fixons $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

a) Lorsque les deux agents se retrouvent, ils restent sur le même site à l'étape suivante. Par conséquent $\boxed{\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1 \text{ et } \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) = 0.}$

b) Sachant C_n, A_{n+1} est réalisé si et seulement si $L_{n+1} \cap W_{n+1}$ est réalisé. Ainsi

$$\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{C_n}(L_{n+1} \cap W_{n+1}) = \mathbb{P}(L_{n+1} \cap W_{n+1}).$$

puisque $L_{n+1} \cap W_{n+1}$ est indépendant de C_n. Comme L_{n+1} et W_{n+1} sont indépendants, on obtient que $\boxed{\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(L_{n+1})\mathbb{P}(W_{n+1}) = \frac{1}{4}.}$

c) De même on obtient par indépendance que

$$\mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{C_n}(\overline{L}_{n+1} \cap \overline{W}_{n+1}) = \mathbb{P}(\overline{L}_{n+1})\mathbb{P}(\overline{W}_{n+1}) = \boxed{\frac{1}{4}},$$

$$\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) = 1 - \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) - \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \boxed{\frac{1}{2}}, \qquad \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{B_n}(\varnothing) = \boxed{0},$$

$$\mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) = \mathbb{P}_{B_n}(\overline{L}_{n+1} \cap \overline{W}_{n+1}) = \mathbb{P}(\overline{L}_{n+1})\mathbb{P}(\overline{W}_{n+1}) = \boxed{\frac{1}{4},}$$

$$\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) - \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \boxed{\frac{3}{4},}$$

où on a utilisé le fait que $(A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1})$ est un système complet d'événements.

5) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. La formule des probabilités totales appliquée trois fois avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n) de probabilités non nulles, entraîne que

$$a_{n+1} = \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})\mathbb{P}(C_n) = \boxed{a_n + \frac{1}{4}c_n.}$$

$$b_{n+1} = \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})\mathbb{P}(C_n) = \boxed{\tfrac{3}{4}b_n + \tfrac{1}{4}c_n.}$$

$$c_{n+1} = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})\mathbb{P}(C_n) = \boxed{\tfrac{1}{4}b_n + \tfrac{1}{2}c_n.}$$

Remarquons que, si $n = 1$, la formule des probabilités totales appliquée trois fois avec le système complet d'événements (B_1, C_1) de probabilités non nulles, entraîne que

$$a_2 = \mathbb{P}_{B_1}(A_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{C_1}(A_2)\mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{4}c_1 = a_1 + \frac{1}{4}c_1,$$

$$b_2 = \mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{C_1}(B_2)\mathbb{P}(C_1) = \frac{3}{4}b_1 + \frac{1}{4}c_1, \qquad c_2 = \mathbb{P}_{B_1}(C_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{C_1}(C_2)\mathbb{P}(C_1) = \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{2}c_1.$$

Et on a bien $a_1 = 0 = a_0 + \frac{1}{4}c_0$, $b_1 = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0$ et $c_1 = \frac{1}{4}b_0 + \frac{1}{2}c_0$.

6) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$c_{n+2} - \frac{5}{4}c_{n+1} = \frac{1}{4}b_{n+1} + \frac{1}{2}c_{n+1} - \frac{5}{4}c_{n+1} = \frac{1}{4}b_{n+1} - \frac{3}{4}c_{n+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) = -\frac{5}{16}c_n.$$

et donc $\boxed{c_{n+2} = \frac{5}{4}c_{n+1} - \frac{5}{16}c_n.}$

b) Il s'agit d'une suite récurrente linéaire l'ordre 2. Son équation caractéristique est $r^2 - \frac{5}{4}r + \frac{5}{16} = 0$ dont le discriminant est $\Delta = \frac{5}{16}$. Elle admet donc deux racines réelles $\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$. Par conséquent, il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$.

Remarquons que $0 < \alpha < \beta$. Par ailleurs $\beta < 1$ puisque $1 - \beta = \frac{3-\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{8} > 0$.

Déterminons λ et μ. On a $0 = c_0 = \lambda + \mu$ et $\frac{1}{4} = \lambda\alpha + \mu\beta$. Ainsi $\lambda = -\mu$ et $\frac{1}{4} = \mu(\beta - \alpha) = \mu\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n).}$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
b_n = 4c_{n+1} - 2c_n &= 4\frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}) - 2\frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\alpha^n\,(2 - 4\alpha) + \frac{\sqrt{5}}{5}\beta^n\,(4\beta - 2) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\alpha^n\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5}\beta^n\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \boxed{\frac{5-\sqrt{5}}{10}\alpha^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\beta^n.}
\end{aligned}$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements,

$$\boxed{a_n = 1 - (b_n + c_n) = 1 - \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\alpha^n - \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\beta^n.}$$

e) Puisque $0 < \alpha < \beta < 1$, nous obtenons que $\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\beta^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$ La probabilité que les deux agents se rencontrent au temps n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, lorsque n est grand, cette probabilité sera proche de 1.

On vérifie grâce à Scilab que $a_{24} \approx 0,948$ et $a_{25} \approx 0,953$. Ainsi la probabilité qu'ils se rencontrent au bout de 25 étape est supérieure à 95%.

⚠ *On ne peut pas conclure immédiatement que les deux agents vont se rencontrer avec probabilité 1. Nous verrons au second semestre comment montrer cela rigoureusement : il nous faudra alors introduire un espace probabilisé infini. Heureusement, tout ce qu'on a fait dans cet exercice restera valide dans ce cadre.*

7) On désire calculer $\mathbb{P}_{C_N}(C_{N-1})$. La formule de Bayes entraîne que

$$\mathbb{P}_{C_N}(C_{N-1}) = \frac{\mathbb{P}_{C_{N-1}}(C_N)\mathbb{P}(C_{N-1})}{\mathbb{P}(C_N)} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^{N+1} - \alpha^{N+1})}{\frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^N - \alpha^N)} = \boxed{\frac{\beta^{N+1} - \alpha^{N+1}}{2(\beta^N - \alpha^N)}.}$$