# Devoir maison n° 6

**À rendre le mercredi 14 novembre 2018**

## Exercice 1 : Probabilité d'avoir un Yams

**Précédemment dans le DM n° 5...**

... on a commencé à analyser le jeu du Yams. On souhaite à présent déterminer la probabilité d'obtenir un Yams (cinq dés ayant la même valeur) en un tour de jeu, c'est-à-dire en lançant les 5 dés, en conservant ceux qui nous intéressent, en relançant les autres, en conservant à nouveau ceux qui nous intéressent et en relançant les autres une derrière fois.

*Par exemple, si on obtient la configuration* $2|2|2|1|5$*, on décide de relancer les dés valant* $1$ *et* $5$*. Supposons qu'on obtienne* $3|2$*. On relance alors le dé valant 3 en espérant obtenir un* $2$*. Si c'est le cas c'est gagné, sinon on s'arrête de jouer et on retente sa chance ultérieurement.*

On peut modéliser cette expérience aléatoire par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où $\Omega = [\![1,6]\!]^5$ et $\mathbb{P}$ est l'équiprobabilité sur $\Omega$. Une éventualité est donc un quintuplet $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5)$ où, pour tout $i \in [\![1,5]\!]$, $\omega_i$ désigne la valeur du $i^{\text{ème}}$ dé. On rappelle que l'ordre n'a pas d'importance.

Le tableau ci-dessous recense les probabilités que nous avons calculées dans le DM n° 5.

| **configuration**[1] | **probabilité** |
|---|---|
| Yams | $\dfrac{6}{6^5} = \dfrac{1}{6^4}$ |
| Carré strict | $\dfrac{150}{6^5}$ |
| Full ou brelan strict | $\dfrac{300+1200}{6^5} = \dfrac{250}{6^4}$ |
| Paire ou double paire strictes | $\dfrac{1800+3600}{6^5} = \dfrac{25}{6^2}$ |
| Autres | $\dfrac{720}{6^5} = \dfrac{20}{6^3}$ |

Nous avons aussi obtenu des probabilités d'améliorations. Elles sont résumées dans le tableau de droite.

| **améliorations**[1] | **probabilité** |
|---|---|
| Carré $\to$ Yams | $\dfrac{1}{6}$ |
| Carré $\to$ Carré | $\dfrac{5}{6}$ |
| Full/Brelan $\to$ Yams | $\dfrac{1}{6^2}$ |
| Full/Brelan $\to$ Carré | $\dfrac{10}{6^2}$ |
| Full/Brelan $\to$ Full/Brelan | $\dfrac{25}{6^2}$ |
| Paire $\to$ Yams | $\dfrac{1}{6^3}$ |
| Paire $\to$ Carré | $\dfrac{15}{6^3}$ |
| Paire $\to$ Full/Brelan | $\dfrac{80}{6^3}$ |
| Paire $\to$ Paire | $\dfrac{120}{6^3}$ |

Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, on introduit les événements suivants :

- $Y_i$ : « obtenir un Yams à l'issue du $i^{\text{ème}}$ lancer »
- $C_i$ : « obtenir un Carré strict à l'issue du $i^{\text{ème}}$ lancer »
- $B_i$ : « obtenir un Brelan strict ou un Full à l'issue du $i^{\text{ème}}$ lancer »
- $P_i$ : « obtenir une Paire ou une Double Paire strictes à l'issue du $i^{\text{ème}}$ lancer »
- $A_i = \overline{Y_i} \cap \overline{C_i} \cap \overline{B_i} \cap \overline{P_i}$.

Dès qu'on a un Yams, on arrête de jouer. Par conséquent $\mathbb{P}_{Y_1}(Y_2) = \mathbb{P}_{Y_1}(C_2) = \mathbb{P}_{Y_1}(B_2) = \mathbb{P}_{Y_1}(P_2) = \mathbb{P}_{Y_2}(Y_3) = 0$.
Pour les mêmes raisons, $\mathbb{P}_{C_1}(B_2) = \mathbb{P}_{C_1}(P_2) = \mathbb{P}_{B_1}(P_2) = 0$.

### Questions

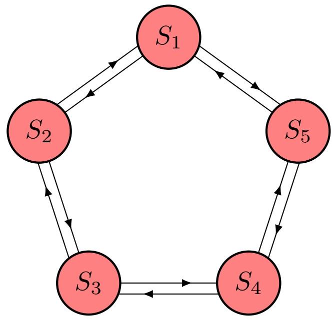
1) Calculer $\mathbb{P}(Y_2)$, $\mathbb{P}(C_2)$, $\mathbb{P}(B_2)$, $\mathbb{P}(P_2)$ et $\mathbb{P}(A_2)$.
2) En déduire $\mathbb{P}(Y_3)$.
3) Finalement quelle est la probabilité d'obtenir un Yams ?

1. Je n'écris pas le mot *strict* pour gagner de la place, mais on parle bien toujours de carrés, de brelans, de paires et de doubles paires stricts

## Exercice 2 : Pentagon Papers

**Extrait du DS n° 3 de l'année dernière.**

### Énoncé du problème




Les agents américains Wade et Leiter se sont donnés rendez-vous au rez-de-chaussée du Pentagone dans l'une des cinq salles d'attente situées chacune à l'un des cinq sommets du bâtiment. Notons $(S_1)$, $(S_2)$, $(S_3)$, $(S_4)$ et $(S_5)$ ces cinq sommets. Ils sont reliés par des doubles couloirs à sens uniques, comme dans le schéma ci-contre.

Les deux agents arrivent à l'heure prévue mais, suite à un malentendu, ils se trouvent à deux sommets adjacents (par exemple $(S_1)$ et $(S_2)$). Pour des raisons de sécurité, ils ont du laisser leur téléphone portable à l'entrée du bâtiment. Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre en empruntant les différents couloirs du Pentagone selon les règles suivantes :

- A partir d'un sommet, chacun choisit de se rendre à l'un des deux sommets adjacents de façon équiprobable.
- Les déplacements des deux agents se font simultanément et tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns les autres.

Ils continuent de se déplacer de cette façon jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne peuvent pas se croiser dans un même couloir puisque chaque couloir a un sens de circulation unique). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus. On s'intéresse à la probabilité que les agents se retrouvent au bout de $n$ étapes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

### Modélisation

Soit $N \geqslant 3$. On suppose que les agents se limitent à un nombre fini $N$ d'étapes afin de modéliser cette expérience aléatoire par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, que l'on ne cherchera pas à expliciter.

Dans ce problème, nous ne nous intéressons pas aux numéros des sites en lesquels se trouvent les agents. Nous étudions seulement le nombre (minimum) de couloirs qui les séparent Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, introduisons donc

- $A_n$ l'événement « Les agents sont sur le même site à l'issue du $n^{\text{ième}}$ déplacement »,
- $B_n$ l'événement « Les agents sont sur des sites adjacents à l'issue du $n^{\text{ième}}$ déplacement »,
- $C_n$ l'événement « Les agents sont à deux couloirs de distance à l'issue du $n^{\text{ième}}$ déplacement »,

et notons $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

Pour nous aider à calculer ces probabilités, introduisons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

- $L_n$ l'événement « A l'étape $n$, l'agent Leiter prend, sans le savoir, la direction le rapprochant de la position de l'agent Wade à l'issue de l'étape $n-1$ ».
- $W_n$ l'événement « A l'étape $n$, l'agent Wade prend, sans le savoir, la direction le rapprochant de la position de l'agent Leiter à l'issue de l'étape $n-1$ ».

*Exemple : supposons que Wade se trouve en $(S_1)$ et Leiter en $(S_4)$ à l'issue de l'étape $n_0 - 1$, avec $n_0 \in \mathbb{N}^*$. L'événement $L_{n_0}$ correspond au fait que Leiter se rende en $(S_5)$. L'événement $\overline{W}_{n_0}$ correspond au fait que Wade se rende en $(S_2)$. On remarquera que si les deux événements $\overline{W}_{n_0}$ et $\overline{L}_{n_0}$ sont réalisés alors, à l'issue de l'étape $n$, les deux agents ne sont plus qu'à un couloir de distance.*

Par hypothèse, la famille $(L_n, W_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.

## Questions

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Que dire de la famille d'événements $(A_n, B_n, C_n)$ ?

   b) Calculer $a_0$, $b_0$, $c_0$.

2) a) Justifier que $C_1 = \overline{L}_1 \cap \overline{W}_1$. En déduire la valeur de $c_1$.
   *On pourra commencer par lister les quatre possibilités de position des deux agents à l'issue de la première étape.*

   b) Exprimer $B_1$ en fonction de $L_1$ et $W_1$. En déduire la valeur de $b_1$.

   c) En déduire que $a_1 = 0$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier brièvement l'inclusion $\overline{L}_1 \cap \overline{W}_1 \cap \bigcap_{k=2}^{n} (L_k \cap \overline{W}_k) \subset C_n$.
   En déduire que $c_n \geqslant \dfrac{1}{4^n}$.

   b) Montrer de façon analogue que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \geqslant \dfrac{1}{4^n}$.

   c) Montrer que $A_2 = \overline{L}_1 \cap \overline{W}_1 \cap L_2 \cap W_2$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $a_n \geqslant \dfrac{1}{16}$.

4) Fixons $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

   a) Justifier que $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 1$ et $\mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) = \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) = 0$.

   b) A l'aide des événements $L_{n+1}$ et $W_{n+1}$, montrer soigneusement que $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$.

   c) Calculer (dans cet ordre) $\mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1})$, $\mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1})$, $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})$, $\mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1})$.

5) Montrer soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $\begin{cases} a_{n+1} = x_a\, a_n + x_b\, b_n + x_c\, c_n \\ b_{n+1} = y_a\, a_n + y_b\, b_n + y_c\, c_n \\ c_{n+1} = z_a\, a_n + z_b\, b_n + z_c\, c_n \end{cases}$,

   où $x_a, x_b, x_c, y_a, y_b, y_c, z_a, z_b, z_c$ sont des réels que l'on explicitera.

   *On remarquera au passage (sans le démontrer) que ces trois formules restent vraies pour $n = 0$ et $n = 1$.*

6) a) A l'aide du système ci-dessus, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad c_{n+2} = \frac{5}{4}c_{n+1} - \frac{5}{16}c_n.$$

   b) Déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \alpha < \beta < 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n).$$

   c) A partir de la dernière ligne du système, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\alpha^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\beta^n.$$

   d) En déduire $a_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$, $\alpha$ et $\beta$.

   e) Calculer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Commenter.

7) A l'étape $N$ les deux agents sont à deux couloirs de distance. Quelle est la probabilité qu'ils étaient déjà à deux couloirs de distance à l'étape $N-1$. On l'exprimera en fonction de $N$, $\alpha$ et $\beta$.