Correction du DM n° 5

Exercice 1 : Une définition de la fonction exponentielle

Partie A : préliminaires

1) Procédons par récurrence. Pour tout $y \in]-1,+\infty[$, on a $1+1\times y \leqslant (1+y)^1$ donc (P_1) est vraie. Supposons que (P_n) soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $y \in]-1,+\infty[$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $(1+y)^{n+1} = (1+y)(1+y)^n \geqslant (1+y)(1+ny)$ et donc

$$(1+y)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)y+ny^2 \geqslant 1+(n+1)y.$$

Nous en déduisons que (P_{n+1}) est vraie. Par récurrence, nous obtenons que $\boxed{(P_n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

2) Procédons par récurrence. Pour tout $y \in]-1,1[$, $(1+y)(1-y) = 1-y^2 \leqslant 1$ donc $1+y \leqslant \dfrac{1}{1-y}$. Ainsi (Q_1) est vraie. Supposons que (Q_n) soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $y \in \left]-1,\dfrac{1}{n+1}\right[$. On a $y \in \left]-1,\dfrac{1}{n}\right[$ donc l'hypothèse de récurrence entraîne que $(1+y)^{n+1} = (1+y)(1+y)^n \leqslant \dfrac{1+y}{1-ny}$. Or

$$\frac{1+y}{1-ny} - \frac{1}{1-(n+1)y} = \frac{(1+y)(1-(n+1)y)-(1-ny)}{(1-ny)(1-(n+1)y)} = \frac{-(n+1)y^2}{(1-ny)(1-(n+1)y)} \leqslant 0$$

si bien que $(1+y)^{n+1} \leqslant \dfrac{1}{1-(n+1)y}$. Nous en déduisons que (Q_{n+1}) est vraie. Par récurrence, nous en déduisons que $\boxed{(Q_n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

3) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que $ns_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

a) Puisque $ns_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|ns_n| \leqslant 1$ et donc $s_n \in \left]-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right[\subset \left]-1,\dfrac{1}{n}\right[$. Soit $n \geqslant n_0$. D'après (P_n) et (Q_n), on obtient $1+ns_n \leqslant (1+s_n)^n \leqslant \dfrac{1}{1-ns_n}$ donc

$$\boxed{ns_n \leqslant (1+s_n)^n - 1 \leqslant \frac{1}{1-ns_n} - 1 = \frac{ns_n}{1-ns_n}.}$$

b) Comme $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, nous obtenons que $\dfrac{ns_n}{1-ns_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, nous obtenons alors que $(1+s_n)^n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\boxed{(1+s_n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$

Partie B : convergence des deux suites

1) a) Soit $n \geqslant n_x$. On alors $-1 < \left|\dfrac{x}{n}\right| < 1$. En particulier $1+\dfrac{x}{n} > 0$ donc $u_n(x) \neq 0$ et

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)\left(1+\dfrac{x}{n}\right)} = \frac{\left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n+1}} &= \left(\frac{n}{n+1}\,\frac{n+1+x}{n+x}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{n(n+1)+nx}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+x)-x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)\left(1-\dfrac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}.}$

b) Soit $n \geqslant n_x$. On a $-(n+x) < -x$ et $n+x>0$ donc $-1 < \dfrac{-x}{n+x}$. Par conséquent la propriété (P_{n+1}) entraîne que

$$\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \geqslant 1-\frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x} > 0.$$

Ainsi $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \geqslant \left(1+\dfrac{x}{n}\right)\dfrac{n}{n+x} = 1$. Cela signifie que la suite $\boxed{\big(u_n(x)\big)_{n\geqslant n_x} \text{ est croissante.}}$

2) Pour tout $n \geqslant n_x$, $v_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{-n} = \dfrac{1}{\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{u_n(-x)}$ et $n_{-x} = n_x$ donc le point précédent entraîne que $\big(u_n(-x)\big)_{n\geqslant n_x}$ est croissante. Nous en déduisons que la suite $\boxed{\big(v_n(x)\big)_{n\geqslant n_x} \text{ est décroissante.}}$

3) a) Soit $n \geqslant n_x$. On a

$$\frac{u_n(x)}{v_n(x)} = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \geqslant 1-\frac{x^2}{n}$$

d'après (P_n) car $-1 < -\dfrac{x^2}{n^2}$. Ainsi $\boxed{1-\dfrac{x^2}{n^2} \leqslant \dfrac{u_n(x)}{v_n(x)} \leqslant 1.}$

b) Puisque $v_n(x) > 0$, nous en déduisons que $v_n(x) - \dfrac{x^2}{n}v_n(x) \leqslant u_n(x) \leqslant v_n(x)$ et donc $-\dfrac{x^2}{n}v_n(x) \leqslant u_n(x)-v_n(x) \leqslant 1$. Enfin $(v_n(x))_{n\geqslant n_x}$ est décroissante donc

$$\forall n \geqslant n_x, \qquad -\frac{x^2}{n}v_{n_x}(x) \leqslant u_n(x)-v_n(x) \leqslant 0.$$

Par encadrement, nous obtenons que $\boxed{u_n(x)-v_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

4) Nous en déduisons que $\big(u_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ et $\big(v_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ sont adjacentes. Par conséquent $\boxed{\text{elles convergent vers un même réel}}$.

Partie C : quelques propriétés de la fonction φ

1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(0) = 1$ donc, en passant à la limite car, on obtient que $\boxed{\varphi(0) = 1.}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ converge vers $\varphi(x)$, on a aussi $u_{n_x}(x) \leqslant \varphi(x)$. De plus $u_{n_x}(x) = \left(1+\dfrac{x}{n_x}\right)^{n_x} = \left(\dfrac{n_x+x}{n_x}\right)^{n_x} > 0$ car $n_x + x > 0$. Ainsi $\boxed{\varphi(x) > 0.}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a vu précédemment que, pour tout $n \geqslant n_x$, $v_n(-x) = \dfrac{1}{u_n(x)}$. En passant à la limite on obtient $\boxed{\varphi(-x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}.}$

d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tous $n \geqslant n_x$, d'après (P_n), on a $u_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \geqslant 1 + n\dfrac{x}{n} = 1+x$. En passant à la limite, on obtient $\boxed{\varphi(x) \geqslant 1+x.}$

2) Donnons-nous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Nous avons, pour n assez grand,

$$\frac{u_n(x)u_n(y)}{u_n(x+y)} = \left(\frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{xy}{n^2+n(x+y)}\right)^n.$$

Puisque $n\dfrac{xy}{n^2+n(x+y)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, la question 3b des préliminaires entraîne que $\boxed{\dfrac{u_n(x)u_n(y)}{u_n(x+y)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$

b) Nous avons aussi $\dfrac{u_n(x)u_n(y)}{u_n(x+y)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\varphi(x)\varphi(y)}{\varphi(x+y)}$. Par unicité de la limite, nous en déduisons que $\dfrac{\varphi(x)\varphi(y)}{\varphi(x+y)} = 1$, c'est-à-dire $\boxed{\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y).}$

Ensuite on a $\boxed{\varphi(x-y) = \varphi(x+(-y)) = \varphi(x)\varphi(-y) = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)}.}$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \varphi(nx) = \big(\varphi(x)\big)^n}$. Ensuite, si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, alors $-n \in \mathbb{N}$ et $\boxed{\varphi(nx) = \dfrac{1}{\varphi((-n)x)} = \dfrac{1}{\big(\varphi(x)\big)^{-n}} = \big(\varphi(x)\big)^n.}$

3) a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. On a alors $\boxed{\dfrac{\varphi(y)}{\varphi(x)} = \varphi(y-x) \geqslant 1 + y - x > 1.}$

b) Comme $\varphi(x) > 0$, il s'ensuit que $\varphi(x) < \varphi(y)$. Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est strictement croissante.}}$

Exercice 2 : Jeu de Yams

Partie A : Combinaisons au premier lancer

1) Il y a $\boxed{\mathrm{card}([\![1,6]\!]^5) = 6^5}$ lancers possibles.

2) Soient a, b, c, d, e deux à deux distincts dans $[\![1,6]\!]$.

a) Il y a $\boxed{\text{un seul lancer permettant d'obtenir } a|a|a|a|a}$ puisque, pour chaque dé, une seule face vaut a.

b) Obtenir la configuration $a|a|a|a|b$ consiste à choisir le dé dont la valeur est b (5 choix), à obtenir b à ce dé (1 choix) et à obtenir a à chacun des quatre autres dés (1 choix).
Il y a donc $\boxed{5 \text{ lancers permettant d'obtenir } a|a|a|a|b}$

c) Obtenir la configuration $a|a|a|b|b$ consiste à choisir les dés dont la valeur est b ($\binom{5}{2} = 10$ choix), à obtenir b à ces deux dés (1 choix), et à obtenir a pour chacun des trois autres dés (1 choix). Il y a donc $\boxed{10 \text{ lancers permettant d'obtenir } a|a|a|b|b}$

d) Obtenir la configuration $a|a|a|b|c$ consiste à choisir les dés dont la valeur est a ($\binom{5}{3} = 10$ choix), à obtenir a à ces trois dés (1 choix), à choisir le dé dont la valeur est b (2 choix), à obtenir b à ce dé (1 choix), et enfin à obtenir c au dernier dé (1 choix). Il y a donc $\boxed{20 \text{ lancers permettant d'obtenir } a|a|a|b|c}$.

e) Obtenir la configuration $a|a|b|b|c$ à choisir le dé dont la valeur est c (5 choix) et à obtenir c à ce dé (1 choix). Ensuite on choisit deux dés parmi les quatre restants ($\binom{4}{2} = 6$ choix), on obtient a à ces deux dés (1 choix), puis on obtient b aux deux autres dés (1 choix).Il y a donc $\boxed{30 \text{ lancers permettant d'obtenir } a|a|b|b|c}$.

f) Obtenir la configuration $a|a|b|c|d$ consiste à choisir les dés dont la valeur est a ($\binom{5}{2} = 10$ choix), à obtenir a à ces deux dés (1 choix), à choisir le dé dont la valeur est b (3 choix), à obtenir b à ce dé (1 choix), à choisir le dé dont la valeur est c (2 choix), à obtenir c à ce dé (1 choix) et enfin à obtenir d au dernier dé (1 choix). Il y a donc $\boxed{60 \text{ lancers permettant d'obtenir } a|a|b|c|d}$.

g) Obtenir la configuration $a|b|c|d|e$ consiste à choisir une façon de ranger les cinq éléments distincts a, b, c, d, e. Il y a donc $\boxed{5! = 120 \text{ lancers permettant d'obtenir } a|b|c|d|e}$.

3) a) Obtenir un Yams revient à choisir la valeur commune a des cinq dés du Yams (6 choix) puis à obtenir la configuration $a|a|a|a|a$ (1 façon). Il y a donc $\boxed{6 \text{ façons d'obtenir un Yams.}}$

b) Obtenir un carré strict revient à choisir la valeur a de quatre dés de même valeur (6 choix), à choisir la valeur b du cinquième dé (5 choix), puis à obtenir la configuration $a|a|a|a|b$ (5 façons). Il y a donc $\boxed{150 \text{ façons d'obtenir un carré strict.}}$

c) Obtenir un full revient à choisir la valeur a des trois dés de même valeur (6 choix), à choisir la valeur b des deux dés de même valeur (5 choix), puis à obtenir la configuration $a|a|a|b|b$ (10 façons). Il y a donc $\boxed{300 \text{ façons d'obtenir un full.}}$

d) Obtenir un brelan strict revient à choisir la valeur a des trois dés de même valeur (6 choix), à choisir les valeurs b et c des deux autres dés ($\binom{5}{2} = 10$ choix), puis à obtenir la configuration $a|a|a|b|c$ (20 façons). Il y a donc $\boxed{1200 \text{ façons d'obtenir un brelan strict.}}$

e) Obtenir une grande suite revient à choisir les valeurs a, b, c, d, e qui se suivent (2 choix : 1|2|3|4|5 ou 2|3|4|5|6), puis à obtenir la configuration $a|b|c|d|e$ (120 façons). Il y a donc

$\boxed{240 \text{ façons d'obtenir une grande suite.}}$

f) Obtenir une double paire stricte revient à choisir les deux valeurs a et b dominantes ($\binom{6}{2} = 15$ choix), à choisir la valeur c du cinquième dé (4 choix), puis à obtenir la configuration $a|a|b|b|c$ (30 façons). Il y a donc $\boxed{1800 \text{ façons d'obtenir une double paire stricte.}}$

g) Obtenir une petite suite possibles, c'est obtenir une des quatorze configurations suivantes :
- $a|1|2|3|4|a$ avec $a \in \{1, 2, 3, 4\}$,
- $a|2|3|4|5$ avec $a \in \{2, 3, 4, 5\}$,
- $a|3|4|5|6$ avec $a \in \{3, 4, 5, 6\}$,
- $1|2|3|4|6$,
- $1|3|4|5|6$.

Dans les trois premiers cas, cela revient à choisir la valeur a (4 choix) puis obtenir la configuration souhaitée (60 façons puisqu'elle est du type $a|a|b|c|d$). Dans les deux derniers cas, cela revient à obtenir la souhaitée configuration (120 façons puisqu'elle est du type $a|b|c|d|e$). On remarque que ces cinq cas sont disjoints et on calcule que

$$4 \times 60 + 4 \times 60 + 4 \times 60 + 120 + 120 = (4 + 4 + 4 + 2 + 2) \times 60 = 480.$$

Il y a donc $\boxed{960 \text{ façons d'obtenir une petite suite.}}$

h) Obtenir une paire stricte revient à choisir la valeur a des deux dés de même valeur (6 choix), à choisir les valeurs $b, c, d,$ des autres dés ($5 \times 4 \times 3 = 60$ choix), puis à obtenir la configuration $a|a|b|c|d$ (60 façons). Il y a donc $120 \times 60 = 3600$ façons d'obtenir une paire stricte. Parmi elles, d'après la question précédente, il y a $4 \times 60 + 4 \times 60 + 4 \times 60 = 720$ petites suites. Nous en déduisons qu'il y a $\boxed{2880 \text{ façons d'obtenir une paire stricte n'étant pas une petite suite.}}$

i) Obtenir rien de tout ça, consiste à obtenir la configuration $1|2|3|5|6$ (120 façons) ou bien la configuration $1|2|4|5|6$ (120 façons). Ainsi il y a $\boxed{240 \text{ façons d'obtenir rien de tout ça.}}$

4) On calcule :

$$6 + 150 + 300 + 1200 + 1800 + 960 + 2880 + 240 + 240 = 7776 = 6^5$$

5) a)
- La seule configuration dont la somme vaut 6 est $1|1|1|1|2$ et il y a 5 façons de l'obtenir. Il y a donc $\boxed{5 \text{ configurations dont la somme des points vaut } 6.}$
- Les configurations dont la somme vaut 7 sont $1|1|1|1|3$ et $1|1|1|2|2$. Il y a respectivement 5 et 10 façons de les obtenir. Il y a donc $\boxed{15 \text{ configurations dont la somme des points vaut } 7.}$
- Les configurations dont la somme vaut 8 sont $1|1|1|1|4$, $1|1|1|2|3$ et $1|1|2|2|2$. Il y a respectivement 5, 20 et 10 façons de les obtenir. Il y a donc $\boxed{35 \text{ configurations dont la somme des points vaut } 8.}$
- Les configurations dont la somme vaut 9 sont $1|1|1|1|5$, $1|2|2|2|2$, $1|1|1|3|3$, $1|1|1|2|4$ et $1|1|2|2|3$. Il y a respectivement 5, 5, 10, 20 et 30 façons de les obtenir. Il y a donc $\boxed{70 \text{ configurations dont la somme des points vaut } 9.}$

b) On constate qu'un dé dont les faces sont numérotées $7-i$ pour $i \in [\![1, 6]\!]$ est identique à un dé classique. Par conséquent, si a, b, c, d, e sont des entiers compris entre 1 et 6, il y a autant de façons d'obtenir la somme $35-(a+b+c+d+e) = (7-a)+(7-b)+(7-c)+(7-d)+(7-e)$ que la somme $a+b+c+d+e$. Terminons en remarquant que la somme des dés ne peut aller que de 5 (si on a que des 1) à 30 (si on a que des 6). Par conséquent, $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![5, 30]\!], \text{ il y a autant de configurations dont la somme des valeurs vaut } i \text{ que de configurations dont la somme des valeurs vaut } 35 - i.}$

Partie B : Amélioration au deuxième coup

1) Supposons qu'on avait obtenu un brelan strict ou un full. On relance donc deux dés. Sur les 36 configurations possibles $\boxed{1 \text{ permet d'obtenir un Yams}}$ et $\boxed{10 \text{ permettent d'obtenir un carré}}$ car cela revient à choisir le dé ayant la même valeur que les trois autres valeurs conservées (2 choix) et à choisir la valeur du dernier dé (5 choix). Enfin $36-1-10 = 25$ donc $\boxed{25 \text{ possibilités permettent d'obtenir un full ou un brelan strict à nouveau}}$
2) Supposons qu'on avait obtenu une paire ou une double paire stricte. On relance alors trois dés. Sur les 216 configurations possibles, $\boxed{1 \text{ permet d'obtenir un Yams}}$ et $\boxed{15 \text{ permettent d'obtenir un carré}}$ car cela revient à choisir les deux dés ayant la même valeur que les deux autres valeurs conservées (3 choix) et à choisir la valeur du dernier dé (5 choix). De plus $\boxed{120 \text{ permettent d'obtenir une paire ou une double paire strictes à nouveau}}$ car cela revient à choisir un triplet de valeurs différentes de la valeur conservée ($5^3 = 125$ choix) mais aussi n'étant pas toutes les trois de même valeurs (il y en a 5) car sinon on obtient un full. Enfin $216 - 1 - 15 - 120 = 80$ donc il y a $\boxed{80 \text{ possibilités permettent d'obtenir un full ou un brelan strict.}}$