Devoir maison n$^{\text{o}}$ 5

À rendre le 5 novembre 2018

Exercice 1 : Une définition de la fonction exponentielle

L'objectif de ce problème est de montrer l'existence de la fonction exponentielle ainsi que quelques unes de ses propriétés usuelles.

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > |x|$, posons $\quad u_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \quad$ et $\quad v_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.

Partie A : préliminaires

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer la propriété $\quad (P_n) \quad : \quad \forall y \in \,]-1,+\infty[, \qquad 1+ny \leqslant (1+y)^n$.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer la propriété $\quad (Q_n) \quad : \quad \forall y \in \left]-1,\dfrac{1}{n}\right[, \qquad (1+y)^n \leqslant \dfrac{1}{1-ny}$.
3) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que $ns_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   a) Montrer que, pour tout n assez grand, $ns_n \leqslant (1+s_n)^n - 1 \leqslant \dfrac{ns_n}{1-ns_n}$.
   b) En déduire que $(1+s_n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Partie B : convergence des deux suites

Donnons-nous $x \in \mathbb{R}$ et posons $n_x = \lfloor |x| \rfloor + 1$.

1) a) Montrer que, pour tout $n \geqslant n_x$, $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)\left(1-\dfrac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$.
   b) A l'aide de la propriété la propriété (P_{n+1}), en déduire que la suite $\big(u_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ est croissante.
2) En remarquant que pour tout $n \geqslant n_x$, $v_n(x) = \dfrac{1}{u_n(-x)}$, montrer que la suite $\big(v_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ est décroissante.
3) a) Montrer que, pour tout $n \geqslant n_x$, $1-\dfrac{x^2}{n} \leqslant \dfrac{u_n(x)}{v_n(x)} \leqslant 1$.
   b) En déduire que $u_n(x) - v_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
4) En déduire que les suites $\big(u_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ et $\big(v_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ convergent vers une même limite. On la note $\varphi(x)$.

La fonction $\varphi : x \in \mathbb{R} \longmapsto \varphi(x)$ est la fonction exponentielle mais on s'empêchera dans ce devoir de la noter $\exp$ afin ne pas être tenté d'utiliser ses propriétés. En effet l'objectif de la suite de problème est justement de retrouver plusieurs propriétés usuelles de cette fonction.

Partie C : quelques propriétés de la fonction φ

Les propriétés de la fonction φ découlent des propriétés des suites $\big(u_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ et $\big(v_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$ par passage à la limite.

1) Montrer que la fonction φ vérifie les propriétés suivantes :
   a) $\varphi(0) = 1$.
   b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) > 0$ (*on pourra utiliser la croissance de la suite* $\big(u_n(x)\big)_{n\geqslant n_x}$).
   c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(-x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \geqslant 1 + x$.

2) Donnons-nous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Montrer que $\dfrac{u_n(x+y)}{u_n(x)u_n(y)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

b) En déduire que $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$ puis que $\varphi(x-y) = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)}$.

c) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi(nx) = \varphi(x)^n$
(*on distinguera les cas où* $n \in \mathbb{N}$ *et* $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$).

3) a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x < y$. Montrer que $\varphi(y - x) > 1$.

b) En déduire que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

A SUIVRE...

Dans un prochain épisode, nous étudierons ses limites aux bornes, ses propriétés de continuité et dérivabilité, ainsi que sa réciproque.

Exercice 2 : Jeu de Yams

Les règles

Le but du jeu de Yams est de remplir une grille de score en réalisant certaines configurations de lancers de dés avec le maximum de points possible. On joue avec cinq dés équilibrés à 6 faces. A chaque tour de jeu, chaque joueur dispose de 3 lancers. Il commence par lancer les cinq dés puis, pour les deux autres lancers, le joueur conserve les dés qui l'intéressent et ne rejoue que ceux qui ne lui conviennent pas. Il peut bien entendu s'arrêter quand il le veut. Les configurations à obtenir sont les suivantes [1] :

- maximum de faces de valeur i, pour chaque $i \in [\![1, 6]\!]$.
- un brelan (trois dés de même valeur).
- un full (trois dés de même valeur et deux autres dés d'une même valeur).
- un carré (quatre dés de même valeur)
- un Yams (cinq dés de même valeur).
- une petite suite (quatre dés qui se suivent : 1|2|3|4 ou 2|3|4|5 ou 3|4|5|6).
- une grande suite (cinq dés qui se suivent : 1|2|3|4|5 ou 2|3|4|5|6).
- le plus grand nombre de points possibles en faisant la somme des valeurs des dés.

Le nombre de points récolté pour chacune de ces configurations varie selon la variante du jeu. Une constante : c'est le Yams qui rapporte le plus de points. Précisons que, lors d'une partie, chaque joueur doit réaliser chacune des combinaisons précédentes. De plus, à chaque tour, il doit obligatoirement en réaliser une (quitte à annuler une configuration, et perdre définitivement les points de cette configuration, s'il n'obtient rien à un tour donné).

Partie A : Combinaisons au premier lancer

Au Yams les dés sont censés être indistinguables mais, pour faciliter le dénombrement (si si je vous assure) et ensuite le calcul des probabilités des configurations, nous allons supposer qu'il y a un premier dé, un deuxième, un troisième, un quatrième et un cinquième. On peut donc coder un lancer de dé par un quintuplet d'entiers entre 1 et 6 (autrement dit un élément de $[\![1, 6]\!]^5$). Bien sûr, avec cette façon de compter, il faudra prendre en compte le fait que l'ordre n'a pas d'importance.

Par exemple, on peut obtenir la configuration $2|5|5|5|5$ *(c'est-à-dire un* 2 *et un carré de* 5*) de cinq façons différentes :*

$$(2,5,5,5,5), \quad (5,2,5,5,5), \quad (5,5,2,5,5), \quad (5,5,5,2,5), \quad (5,5,5,5,2).$$

1. ... elles peuvent varier selon les nombreuses variantes du Yams.

1) Combien y a-t-il de lancers possibles ?

2) Soient a, b, c, d, e deux à deux distincts dans $[\![1, 6]\!]$ (ils sont fixés dans cette question). Combien y a-t-il de lancers avec pour configuration

   a) $a|a|a|a|a$?
   b) $a|a|a|a|b$?
   c) $a|a|a|b|b$?
   d) $a|a|a|b|c$?
   e) $a|a|b|b|c$?
   f) $a|a|b|c|d$?
   g) $a|b|c|d|e$?

3) En déduire le nombre de façons d'obtenir

   a) un Yams ?
   b) un carré strict (un carré qui n'est pas un Yams) ?
   c) un full ?
   d) un brelan strict (un brelan qui n'est pas un full, un carré ou un Yams) ?
   e) une grande suite ?
   f) une double paire stricte (deux dés d'une même valeur et deux autres dés de même valeur mais différente de la valeur précédente, un dernier dé ayant une valeur différente des précédentes) ?
   g) une petite suite qui n'est pas une grande suite ?
   On pourra faire deux cas selon que les cinq valeurs sont distinctes ou non.
   h) une paire stricte (une configuration avec deux dés d'une même valeur mais qui n'est pas une double paire, un brelan, un full, un carré ou un Yams) n'étant pas une petite suite ?
   i) rien de tout ça (1|2|3|5|6 ou 1|2|4|5|6) ?

4) Vérifier que la somme de toutes les quantités de la question 3 est bien égale au nombre total de lancers.

5) a) Combien y a-t-il de configurations dont la somme des points vaut 5 ? 6 ? 7 ? 8 ? 9 ?
   Le calcul devient fastidieux ensuite. Pour information il y a 125, 205, 305, 420, 540, 651, 235 et 780 configurations dont la somme des points vaut 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 respectivement.
   b) Expliquer pourquoi, pour tout $i \in [\![5, 17]\!]$, il y a autant de configurations dont la somme des valeurs vaut i que de configurations dont la somme des valeurs vaut $35 - i$?

Partie B : Amélioration au deuxième coup

On désire désormais obtenir un Yams. On relance alors intelligemment certains dés selon la configuration obtenue précédemment. Par exemple, si on avait obtenu un carré strict, alors on relance le seul dé n'ayant pas la même valeur et, sur les six configurations possibles, une seule nous donne un Yams tandis que les cinq autres nous donnent un carré strict à nouveau.

1) Supposons qu'on avait obtenu un brelan strict ou un full. On relance donc deux dés. Sur les 36 configurations possibles, combien permettent d'obtenir un Yams ? un carré ? un full ou un brelan strict à nouveau ?

2) Supposons qu'on avait obtenu une paire ou une double paire strictes. On relance alors trois dés. Sur les 216 configurations possibles, combien permettent d'obtenir un Yams ? un carré ? un full ou un brelan strict ? une paire ou double paire strictes ?

Si on avait obtenu cinq dés de valeurs différentes, alors on relance tous les dés. Mais alors les calculs ont été faits dans la partie A.

A SUIVRE...

Si on divise les résultats de la question 3 de la partie A par le nombre total de configurations possibles, alors on obtient les probabilités d'obtenir chacune des configurations en faisant un lancer. En effet on peut modéliser cette expérience aléatoire par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où $\Omega = [\![1, 6]\!]^5$ et $\mathbb{P}$ est l'équiprobabilité sur Ω. Dans un prochain épisode, nous calculerons la probabilité d'obtenir un Yams (sous entendu en ayant la possibilité de relancer au plus deux fois les dés qui ne nous conviennent pas).