Correction du DM n° 4

Exercice 1 : Étude d'une suite récurrente

Commençons par remarquer que les fonctions $y \mapsto e^{-y}$ et $y \mapsto \dfrac{1}{y}$ sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$ donc leur produit, la fonction f, également. Par ailleurs, la fonction f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ si bien que, par récurrence immédiate, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$.

Partie A

1) • On a $\lim\limits_{y\to 0^+} e^{-y} = 1$ et $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{1}{y} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{y\to 0^+} f(y) = +\infty}$ par produit de limites.

   • On a $\lim\limits_{y\to +\infty} e^{-y} = 0$ et $\lim\limits_{y\to +\infty} \dfrac{1}{y} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{y\to +\infty} f(y) = 0}$ par produit de limites.

2) La fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont. On a, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(y) = \frac{-e^{-y}y - e^{-y}}{y^2} = -\frac{1+y}{y^2}e^{-y} < 0.$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$

3) a) La fonction $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+^*}$ en tant que somme des fonctions $y \longmapsto e^{-y}$ et $y \longmapsto -y^2$ qui sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b) Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$f(y) - y = \frac{e^y - y^2}{y} = \frac{g(y)}{y}.$$

   Par conséquent y est un point fixe de f si et seulement si y vérifie $g(y) = 0$.

   La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs :

   • On a $\lim\limits_{y\to 0^+} g(y) = 1 - 0 = 1$.

   • On a $\lim\limits_{y\to +\infty} e^{-y} = 0$ et $\lim\limits_{y\to +\infty} y^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{y\to +\infty} g(y) = -\infty$ par produit de limites.

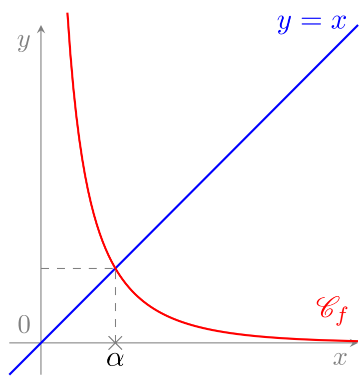
   Comme $0 \in]-\infty, 1[= f(\mathbb{R}_+^*)$, le théorème de la bijection entraîne qu'il existe unique réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(\alpha) = 0$.

   Ainsi $\boxed{f \text{ admet un unique point fixe sur } \mathbb{R}_+^*.}$

   c) Nous avons $e^{-1} - 1 < 0 < e^{-1/e} - e^{-2}$ donc $g(1) < g(\alpha) < g(1/e)$. Par stricte croissance de g, nous obtenons donc que $\boxed{1 > \alpha > 1/e.}$

4) Nous en déduisons le tableau de variations et l'allure de la courbe :

y	0		α		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	α	$\searrow$	0



Partie B

1) On conjecture que $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, que $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et donc que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

2) a) On calcule $x_1 = 1/e$ puis $x_2 = \dfrac{e^{-1/e}}{1/e} = e^{1-1/e}$. On a $x_2 - x_0 = e^{1-1/e} - 1 > 0$ (car $1 - 1/e > 0$ et $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$). Ainsi $\boxed{x_2 > x_0.}$ Ensuite, puisque f est strictement décroissante, on obtient que $f(x_2) < f(x_0)$, c'est-à-dire $\boxed{x_3 < x_1.}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$:« $x_{2(n+1)} > x_{2n}$ ». Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- *Initialisation :* On a déjà montré que $x_2 > x_0$ donc $P(0)$ est vraie.
- *Hérédité :* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $x_{2(n+1)} > x_{2n}$. Puisque la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $x_{2(n+1)+1} = f(x_{2(n+1)}) < f(x_{2n}) = x_{2n+1}$ puis $x_{2(n+1)+2} = f(x_{2(n+1)+1}) > f(x_{2n+1}) = x_{2n+2}$. Ainsi $x_{2(n+2)} > x_{2(n+1)}$, c'est-à-dire $P(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion :* Par récurrence, nous obtenons donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2(n+1)} > x_{2n}$. Cela signifie que $\boxed{(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2(n+1)} > x_{2n}$ donc $x_{2(n+1)+1} = f(x_{2(n+1)}) < f(x_{2n}) = x_{2n+1}$. Ainsi $\boxed{x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$

Partie C

La fonction h est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

1) Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\boxed{h(y) = \frac{e^{-f(y)}}{f(y)} = \frac{y\, e^{-e^{-y}/y}}{e^{-y}} = y \exp\left(y - \frac{e^{-y}}{y}\right) = y \exp\left(y - f(y)\right).}$$

2) On a $\lim\limits_{y\to 0^+} f(y) = +\infty$ donc $\lim\limits_{y\to 0^+} (y - f(y)) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{y\to 0^+} \exp(y - f(y)) = 0$. Nous en déduisons que $\boxed{\lim\limits_{y\to 0^+} h(y) = 0.}$

3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc continue. Elle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ puisqu'elle est la composée de f avec elle-même. De plus $\lim\limits_{y\to 0^+} h(y) = 0 = h(0)$ donc elle est également continue en 0. Ainsi $\boxed{h \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$

4) On a $h(0) = 0$ donc $\boxed{0 \text{ est un point fixe de } h}$. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$y = h(y) \iff y \exp\left(y - f(y)\right) = y \iff \exp\left(y - f(y)\right) = 1 \iff y = f(y) \iff y = \alpha,$$

d'après la question 3b de la partie A. Ainsi $\boxed{\alpha \text{ est l'unique autre point fixe de } h \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

Partie D

1) La suite $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Par ailleurs elle est minorée par 0. Le théorème de la limite monotone entraîne que $\boxed{(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } \ell.}$

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2(n+1)+1} = h(x_{2n+1})$, et puisque la fonction h est continue sur l'intervalle fermé $\mathbb{R}_+$, nous en déduisons que ℓ est un point fixe de h sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$. Par ailleurs la décroissance de $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2n+1} \leqslant x_1 = \dfrac{1}{e}$. Par passage à la limite dans l'inégalité, nous obtenons $\ell \leqslant \dfrac{1}{e}$. Enfin $\alpha > \dfrac{1}{e}$ si bien que ℓ ne peut être égale à α. Ainsi $\boxed{\ell = 0.}$

2) Raisonnons par l'absurde et supposons que $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Puisqu'elle est croissante, le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle converge vers un réel ℓ'. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2(n+1)} = h(x_{2n})$, et puisque la fonction h est continue sur l'intervalle fermé $\mathbb{R}_+$, nous en déduisons que ℓ' est un point fixe de h sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $\ell = 0'$ ou $\ell' = \alpha$. Par ailleurs la croissance de $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ entraîne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2n} \geqslant x_0 = 1$. Par passage à la limite dans l'inégalité, nous obtenons $\ell' \geqslant 1$. Enfin $\alpha < 1$ si bien que ℓ ne peut être égale ni à α, ni à 0. C'est absurde.

Ainsi $\boxed{(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas majorée.}}$ Puisqu'elle est croissante, le théorème de la limite monotone entraîne que $\boxed{(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}\text{elle converge vers } +\infty.}$

3) Puisque $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite, nous en déduisons que la suite $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge.}}$

Exercice 2 : Image d'une partie par une application

1) Soient A et B dans $\mathcal{P}(E)$.

   a) Supposons que $A \subset B$. Supposons que $y \in f(A)$. Par définition, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Ainsi $x \in B$ et donc $y = f(x) \in f(B)$. Nous en déduisons que $\boxed{f(A) \subset f(B).}$

   b) Soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. On a $x \in A$ ou $x \in B$ donc $y = f(x) \in f(A)$ ou $y = f(x) \in f(B)$. Ainsi $y \in f(A) \cup f(B)$. Nous en déduisons que $\boxed{f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B).}$

   Réciproquement, supposons que $y \in f(A) \cup f(B)$. On a $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$ donc il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$ ou il existe $z \in B$ tel que $y = f(z)$. Puisque $x \in A \cup B$ et $z \in A \cup B$, nous obtenons que $y \in f(A \cup B)$. Nous en déduisons que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$. Par conséquent $\boxed{f(A) \cup f(B) = f(A \cup B).}$

   c) Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. On a $x \in A$ et $x \in B$ donc $y = f(x) \in f(A)$ et $y = f(x) \in f(B)$. Ainsi $y \in f(A) \cap f(B)$. Nous en déduisons que $\boxed{f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).}$

2) a) Supposons que f soit injective. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. On a $y \in f(A)$ donc il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. On a aussi $y \in f(B)$ donc il existe $z \in B$ tel que $y = f(z)$. On a donc $f(x) = f(z)$ et l'injectivité de f entraîne que $x = z$. Ainsi $x \in A \cap B$ et donc $y = f(x) \in f(A \cap B)$. Nous en déduisons que $\boxed{f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B).}$

   b) Supposons que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

   Donnons-nous $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. En considérant $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$, on a $f(x) \in f(A)$ et $f(y) \in f(B)$ donc $f(x) = f(y) \in f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$. Par conséquent $x = y$ (car sinon $A \cap B = \{x\} \cap \{y\} = \varnothing$ et donc $f(A \cap B) = \varnothing$, ce qui est absurde puisque ce dernier contient $f(x)$). Nous en déduisons que $\boxed{f \text{ est injective.}}$

Exercice 3 : Un peu d'info...

```
x=input('Entrez un réel x :');
y=input('Entrez un réel y supérieur strictement à ' + string(x) + ' :');
s=(1+floor(exp(%pi*cos(log(y-x)))))∧(1/7);
disp('Le réel calculé est ' + string(s) + ' :');
```