Devoir maison n° 4

À rendre le lundi 15 octobre 2017

Exercice 1 : Étude d'une suite récurrente

(extrait du DS n° 2 de l'année dernière... lui même inspiré d'un concours)

L'objectif de ce problème est d'étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ avec

$$f : y \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{e^{-y}}{y}.$$

Partie A

1) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
2) Étudier les variations de la fonction f.
3) a) Étudier les variations de la fonction $g : y \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto e^{-y} - y^2$.
   b) En déduire que f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera α.
   c) Montrer que $\dfrac{1}{e} < \alpha < 1$.
4) Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé. On fera apparaître le réel α dans le tableau et sur la courbe.

Partie B

1) En vous aidant de la courbe, conjecturer la nature des suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) a) Montrer que $x_2 > x_0$ et $x_3 < x_1$.
   b) Montrer soigneusement que les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissantes et décroissantes.

Partie C

Introduisons la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \qquad h(y) = \begin{cases} f \circ f(y) & \text{si} \quad y > 0, \\ 0 & \text{si} \quad y = 0. \end{cases}$$

1) Expliciter $h(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que $\lim\limits_{y \to 0^+} h(y) = 0$.
3) En déduire que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4) Montrer que les réels 0 et α sont les uniques points fixes de h dans $\mathbb{R}_+$.

Partie D

1) Montrer que $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.
2) Montrer que la suite $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. En déduire sa nature.
3) Conclure quant à la nature de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 : Image d'une partie par une application

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Soient A une partie de E et $y \in F$. Rappelons que, par définition de l'image d'une partie par une application, nous avons $y \in f(A)$ si et seulement si il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

1) Soient A et B dans $\mathcal{P}(E)$.
   a) Montrer que, si $A \subset B$, alors $f(A) \subset f(B)$.
   b) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   c) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2) a) Supposons que f soit injective. Montrer que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \qquad f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B).$$

   b) Réciproquement supposons que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Montrer qu'alors f est injective.

Exercice 3 : Un peu d'info...

Écrire un programme en langage Scilab qui :

- demande à l'utilisateur un réel x,
- demande à l'utilisateur un réel y strictement supérieur au réel x entré précédemment,
- calcule $\sqrt[7]{1 + \lfloor e^{\pi \cos(\ln(y-x))} \rfloor}$,
- affiche le résultat (en faisant une phrase).