Correction du DM n$^{\text{o}}$ 3

Exercice 1 : Cosinus et sinus de $\pi/5$

Partie A : A la recherche de $\cos(2\pi/5)$ et $\sin(2\pi/5)$

1) a) Si $z \in \mathbb{C}$ est solution de (E), alors $|z|^5 = |z^5| = |1| = 1$ et donc $\boxed{|z| = 1.}$

b) Si z est solution de (E) alors, d'après la question précédente, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Nous avons donc $1 = z^5 = e^{5i\theta}$, d'après la formule de Moivre. Nous en déduisons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $5\theta = 2k\pi$, c'est-à-dire $\theta = \dfrac{2k\pi}{5}$. Réciproquement, si $z = e^{2i\ell\pi/5}$ pour un certain $\ell \in \mathbb{Z}$, alors $z^5 = e^{2i\ell\pi} = 1$.

On remarque enfin que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{2i(k+5)\pi/5} = e^{2ik\pi/5}e^{2i\pi} = e^{2ik\pi/5}$. Ainsi (E) admet cinq solutions : $\boxed{\zeta_0 = 1,\ \zeta_1 = e^{2i\pi/5},\ \zeta_2 = e^{4i\pi/5},\ \zeta_3 = e^{6i\pi/5} = e^{-4i\pi/5} \text{ et } \zeta_4 = e^{8i\pi/5} = e^{-2i\pi/5}.}$

2) a) On a $1 + 0 + 0^2 + 0^3 + 0^4 = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas solution de (E').

b) Donnons-nous $z \in \mathbb{C}^*$ et posons $Z = z + \dfrac{1}{z}$. Nous avons

$$Z^2 + Z - 1 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} - 1 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} - 1 = \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2}.$$

Ainsi $0 = Z^2 + Z - 1$ si et seulement si $0 = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$. Nous avons montré que $\boxed{z \text{ est solution de } (E') \text{ si et seulement si } Z^2 + Z - 1 = 0.}$

c) Le trinôme $X^2 + X - 1$ admet pour discriminant $\Delta = 5$ donc il admet deux racines réelles : $\boxed{r_1 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } r_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}.}$

d) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Nous avons $z + \dfrac{1}{z} = r_1$ si et seulement si $z^2 - r_1 z + 1 = 0$. Or le trinôme $X^2 - r_1X + 1$ admet pour discriminant

$$\Delta_1 = (-r_1)^2 - 4 = \frac{1 + 5 + 2\sqrt{5}}{4} - 4 = \frac{6 + 2\sqrt{5} - 16}{4} = \frac{-5+\sqrt{5}}{2}.$$

Une racine carrée de Δ_1 dans $\mathbb{C}$ est $\delta_1 = i\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Nous en déduisons que le trinôme $X^2 - r_1X + 1$ admet deux racines complexes : $\dfrac{r_1 - \delta_1}{2}$ et $\dfrac{r_1 + \delta_1}{2}$, c'est-à-dire

$$\boxed{-\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.}$$

Nous avons $z + \dfrac{1}{z} = r_2$ si et seulement si $z^2 - r_2 z + 1 = 0$. Or le trinôme $X^2 - r_2X + 1$ admet pour discriminant

$$\Delta_2 = (-r_2)^2 - 4 = \frac{1 + 5 - 2\sqrt{5}}{4} - 4 = \frac{6 - 2\sqrt{5} - 16}{4} = -\frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Une racine carrée de Δ_2 dans $\mathbb{C}$ est $\delta_2 = i\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Nous en déduisons que le trinôme $X^2 - r_2X + 1$ admet deux racines complexes : $\dfrac{r_2 - \delta_2}{2}$ et $\dfrac{r_2 + \delta_2}{2}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{-1+\sqrt{5}}{4} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.}$$

e) Nous déduisons des questions précédentes qu'un complexe $z \in \mathbb{C}^*$ est solution de (E') si et seulement si $\left(Z = z + \dfrac{1}{z}\right.$ et $\left.Z^2 + Z - 1 = 0\right)$ si et seulement si $\left(z + \dfrac{1}{z} = r_1\right.$ ou $\left.z + \dfrac{1}{z} = r_2\right)$ si et seulement si

$$\boxed{z \in \left\{ -\frac{1+\sqrt{5}}{4} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},\quad -\frac{1+\sqrt{5}}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}},\quad \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \right\}.}$$

3) a) Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$,

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \sum_{k=0}^{4} z^k = \frac{1-z^5}{1-z}$$

Ainsi $\boxed{z \in \mathbb{C}\backslash\{1\} \text{ est une solution de } (E) \text{ si et seulement si } z \text{ est solution de } (E').}$

b) Il reste à identifier précisément chaque racine. Pour cela regardons le signe de leurs parties réelles et imaginaires respectives.

- On a $\mathfrak{Re}(\zeta_1) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) \geqslant 0$ et $\mathfrak{Im}(\zeta_1) = \sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) \geqslant 0$ puisque $\dfrac{2\pi}{5} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Par conséquent $\zeta_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + \dfrac{i}{2}\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Nous en déduisons que

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.}$$

- On a $\mathfrak{Re}(\zeta_2) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) \leqslant 0$ et $\mathfrak{Im}(\zeta_2) = \sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) \geqslant 0$ puisque $\dfrac{4\pi}{5} \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$. Par conséquent $\zeta_2 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} + \dfrac{i}{2}\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Nous en déduisons que

$$\boxed{\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.}$$

4) Nous obtenons donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$$

et

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.}$$

Partie B : Une suite récurrente linéaire d'ordre 2

1) a) Le réel $\sqrt{5} - 1$ est positif et son carré est $5 + 1 - 2\sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{5}$. Par unicité de la racine carrée d'un réel positif, nous en déduisons que $\boxed{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1.}$

b) On a

$$|\zeta| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

On cherche θ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{\mathfrak{Re}(\zeta)}{|\zeta|} = \frac{1/2}{(\sqrt{5}-1)/2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

et

$$\sin(\theta) = \frac{\mathfrak{Im}(\zeta)}{|\zeta|} = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-5)}/2}{(\sqrt{5}-1)/2} > 0.$$

Le choix de $\theta = \dfrac{\pi}{5}$ convient.

On peut (mais c'est inutile) finir le calcul ci-dessus :

$$\sin(\theta) = \frac{\mathfrak{Im}(\zeta)}{|\zeta|} = \frac{\sqrt{2\sqrt{5}-5})/2}{(\sqrt{5}-1)/2} = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}-5}{6-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(2\sqrt{5}-5)(3+\sqrt{5})}{2(9-5)}} = \frac{\sqrt{5}-5}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Nous en déduisons que $\boxed{\zeta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}e^{i\pi/5}.}$

2) a) Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 + r + \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = 0$. Son discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = -5 + 2\sqrt{5} < 0$ (en effet $20 < 25$ donc $2\sqrt{5} = \sqrt{20} < \sqrt{25} = 5$). Elle admet donc deux racines réelles conjuguées ζ et $\overline{\zeta}$ avec

$$\zeta = \frac{1 + i\sqrt{2\sqrt{5}-5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}e^{i\pi/5}.$$

Il existe alors des réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \left(\lambda\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right) + \mu\sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)\right).$$

On a $\lambda = u_0 = 2$ puis

$$\begin{aligned} 1 = u_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\lambda\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \mu\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{\mu(\sqrt{5}-1)}{4}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$

Ainsi $\mu = 0$ et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right).}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $\cos$ sont bornée par 1, on a

$$|u_n| = \left|2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right)\right| \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n.$$

Puisque $\left|\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right| \leqslant 1$, on a $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par encadrement, nous obtenons $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

Exercice 2 : Divergence des suites $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$

---

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)$. Puisque $\sin(1) \neq 1$, on a

$$\cos(n) = \frac{\sin(n+1) - \sin(n)\cos(1)}{\sin(1)}.$$

Les suites $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers L_1 donc, par opérations algébriques sur les limites,

$$\cos(n) = \frac{\sin(n+1) - \sin(n)\cos(1)}{\sin(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{\frac{L_1 - L_1\cos(1)}{\sin(1)} = L_2.}$$

2) La première ligne du système découle de la question précédente. Pour obtenir la deuxième ligne, on écrit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$. Par opérations algébriques sur les limites, la suite $(\cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_2\cos(1) - L_1\sin(1)$. Mais il s'agit de la suite $(\cos(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers L_2. Par unicité de la limite, on obtient que $\boxed{L_2 = -\sin(1)L_1 + \cos(1)L_2.}$

3) Les limites L_1 et L_2 sont solutions de

$$\left\{\begin{array}{ccccc} (\cos(1)-1)\times L_1 & + & \sin(1)\times L_2 & = & 0 \\ -\sin(1)\times L_1 & + & (\cos(1)-1)\times L_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Nous en déduisons que

$$\left\{\begin{array}{ccccc} (\cos(1)-1)\sin(1)\times L_1 & + & \sin(1)^2\times L_2 & = & 0 \\ -\sin(1)(\cos(1)-1)\times L_1 & + & (\cos(1)-1)^2\times L_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

En additionnant les deux lignes, on obtient $\big(\sin(1)^2 + (\cos(1)-1)^2\big)L_1 = 0$ et donc $\boxed{L_1 = 0.}$ Ainsi $L_2\sin(1) = 0$ et donc $\boxed{L_2 = 0.}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$. Par unicité de la limite, on obtient donc $0 = L_1^2 + L_2^2 = 1$. $\boxed{\text{C'est absurde.}}$

5) Ainsi la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Si la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, alors

$$\sin(n) = \frac{\cos(n)\sin(1) - \cos(n+1)}{\sin(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{L_1\sin(1) - L_1}{\sin(1)}.$$

C'est absurde. Donc $\boxed{(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge aussi.}}$

6) $\boxed{\text{Les suites } (\sin(n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ou } (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne tendent pas vers } \pm\infty}$ puisqu'elles sont bornées (par 1).

Exercice 3

1) D'abord on a $u_0 > 0$ donc u_0^α a bien un sens. Ainsi $u_1 = c\,u_0^\alpha$ est bien défini et strictement positif. Supposons maintenant que u_n est bien défini et strictement positif pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors u_n^α a un sens et $u_{n+1} = c\,u_n^\alpha$ est donc bien défini et strictement positif. Par récurrence, nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et strictement positif.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(c\,u_n^\alpha) = \ln(c) + \alpha\,\ln(u_n) = \alpha\,v_n + \ln(c).$$

Ainsi $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite arithmético-géométrique.}}$

3) Cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha\,x + \ln(c)$. On trouve $x = \dfrac{\ln(c)}{1-\alpha}$ puisque $\alpha \neq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - x$ et donc

$$w_{n+1} = v_{n+1} - x = \alpha\,v_n + \ln(c) - (\alpha\,x + \ln(c)) = \alpha(v_n - x) = \alpha w_n.$$

Ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = w_n + x = w_0\,\alpha^n + x = (v_0 - x)\,\alpha^n + x$$

et donc $u_n = e^{v_n} = e^{(v_0-x)\,\alpha^n + x}$.
On a $e^x = e^{\ln(c)/(1-\alpha)} = c^{1/(1-\alpha)}$ et $e^{v_0-x} = e^{\ln(r)+\ln(c)/(\alpha-1)} = r\,c^{1/(\alpha-1)}$. Nous en déduisons que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \left(u_0\,c^{1/(\alpha-1)}\right)^{\alpha^n}\, c^{1/(1-\alpha)}.}$$