Correction du DM n° 2

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On a

$$\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=k+1}^{2k} i = \sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{i=0}^{2k} i - \sum_{i=0}^{k} i\right) = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2k(2k+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}\right) = \sum_{k=2}^{n}\frac{k(4k+2-k-1)}{2}$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{3k^2+k}{2}\right) - 0 - \frac{4}{2}$$
$$= \frac{3}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2} - 2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+n(n+1)-8}{4}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+2)-8}{4}$$
$$= \boxed{\frac{n(n+1)^2-4}{2}}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{k!}\,\frac{6^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}3^k\cdot 6^{n-k}\right) = \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k\cdot 6^{n-k} - \binom{n}{0}3^0\cdot 6^{n-0}\right).$$

La formule du binôme de Newton entraîne que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k\cdot 6^{n-k} = (3+6)^n = 9^n$. Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k}{k!}\,\frac{6^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{9^n-6^n}{n!}.}$$

3) a)
- La fonction $x \longmapsto x^{\sqrt{5}}-1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (puisque $\sqrt{5}>1$).
- Ensuite, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ (resp. $x\in\mathbb{R}_+^*$), $x^{\sqrt{5}}-1\geqslant 0$ (resp. >0) si et seulement si $x\geqslant 1$ (resp. $x>1$).
- Puisque $0\leqslant \frac{6}{11} < 11$, la fonction $y\longmapsto y^{6/11}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Nous en déduisons que $\boxed{f \text{ est définie et continue sur } [1,+\infty[\text{ et dérivable sur }]1,+\infty[}$. De plus

$$\boxed{\forall x\in\,]1,+\infty[,\qquad f'(x) = (\sqrt{5}x^{\sqrt{5}-1})\,\frac{6}{11}(x^{\sqrt{5}}-1)^{6/11-1} = \frac{6\sqrt{5}x^{\sqrt{5}-1}}{11(x^{\sqrt{5}}-1)^{5/11}}}.$$

b)
- La fonction $x\longmapsto 2x^2+9x-5$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule uniquement en $1/2$ et -5. En effet le trinôme $2X^2+9X-5$ admet pour discriminant $\Delta = 121 = 11^2$ si bien qu'il admet deux racines réelles $\frac{-9+11}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{-9-11}{4} = -5$.

- La fonction $y \longmapsto \ln(|y|)$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi $\boxed{g \text{ est définie, continu et dérivable sur }]-\infty,-5[,\ ]-5,1/2[\text{ et }]1/2,+\infty[}$. De plus

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-5,\frac{1}{2}\right\}, \qquad g'(x)=\frac{4x+9}{2x^2+9x-5}.}$$

c) Remarquons déjà que, si $x=0$, alors $\dfrac{\pi}{2}e^{-x^2}=\dfrac{\pi}{2}$ et donc $h(x)$ n'est pas défini. Nous avons :

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{\pi}{2}e^{-x^2}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (*sur* $\mathbb{R}$ *tout entier aussi, mais on a en tête qu'on va composer avec* $\tan$...)
- Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{\pi}{2}e^{-x^2}\in\,]0,\pi/2[$.
- La fonction tangente est définie, continue et dérivable sur $]0,\pi/2[$.

Par conséquent $\boxed{h \text{ est définie, continue et dérivable sur } \mathbb{R}^*}$. De plus,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad h'(x)=-\frac{\pi x e^{-x^2}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}e^{-x^2}\right)}}$$

d) $\boxed{\text{La fonction } \xi \text{ est définie, continue et dérivable sur } \mathbb{R}^*}$ puisqu'elle est le produit des fonctions $t\longmapsto e^{t\ln(\pi)}$ et $t\longmapsto \dfrac{1}{t}$ qui sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}^*$. De plus

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad \xi'(t)=\frac{t\,\ln(\pi)\pi^t-\pi^t}{t^2}=(\ln(\pi)t-1)\frac{\pi^t}{t^2}.}$$

e) $\boxed{\text{La fonction } \psi \text{ est définie, continue et dérivable sur } \mathbb{R}}$ car il s'agit de la composée de fonction qui sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \psi'(x) &= \big(-4\sin(4x)\big)\big(3\cos(3\cos(4x))\big)\big(-2\sin(2\sin(3\cos(4x)))\big)\\ &= 24\sin(4x)\cos(3\cos(4x))\sin(2\sin(3\cos(4x)))\end{aligned}}$$

Remarque : pour calculer cette dérivée sans se tromper, on peut écrire $\psi=u\circ v\circ w$ *avec* $u: x\mapsto\cos(2x)$, $v: x\mapsto \sin(3x)$ *et* $w: x\mapsto\cos(4x)$. *On a*

$$\psi'=(u\circ v\circ w)'=(v\circ w)'\times(u'\circ v\circ w)=w'\times(v'\circ w)\times(u'\circ v\circ w).$$

f) Tout d'abord le terme $x^\alpha=e^{\alpha\ln(x)}$ est bien défini si et seulement si $x>0$ (que l'on prolonge éventuellement en 0 en posant $0^\alpha=0$ dans le cas où $\alpha\geqslant 0$). La fonction $x\longmapsto x^\alpha\ln(x)$ est définie et continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi la fonction $\boxed{\varphi: x\longmapsto e^{x^\alpha\ln(x)} \text{ est définie, continue et dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$. De plus

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x)=\big(\alpha x^{\alpha-1}\ln(x)+\frac{x^\alpha}{x}\big)e^{x^\alpha\ln(x)}=(\alpha\ln(x)+1)x^{\alpha-1}x^{x^\alpha}=(\alpha\ln(x)+1)x^{\alpha-1+x^\alpha}.}$$

Remarque : si $\alpha>0$, *on convient que* $0^\alpha=0$ *et donc* $0^{0^\alpha}=0^0=1$. *On pourrait donc prolonger* φ *en* 0 *en posant* $\varphi(0)=1$ *puis montrer qu'elle est continue sur* $\mathbb{R}_+$ *(et même dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *si* $\alpha\geqslant 1$*). On attendra les chapitres* Continuité en un point *et* Dérivation *pour faire ce type de prolongements*

Partie A : domaine de définition, continuité, dérivabilité

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2-1}$ est défini si et seulement si $x^2 - 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $|x| \geqslant 1$. Ainsi $\boxed{D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.}$

2) D'abord la fonction $x \longmapsto 2x - 1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) La fonction $x \longmapsto x^2 - 1$ est continue sur $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est continue sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Ainsi $\boxed{f \text{ est continue sur les intervalles }]-\infty, -1] \text{ et } [1, +\infty[.}$
   b) La fonction $x \longmapsto x^2 - 1$ est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable sur les intervalles }]-\infty, -1[\text{ et }]1, +\infty[.}$

Remarque : La rédaction ci-dessus pourra être condensée lorsqu'on aura pris l'habitude de la rédiger correctement. L'important est de bien se ramener à la proposition sur la continuité (resp. dérivabilité) d'une fonction composée $h \circ g$. Il faut bien vérifier ***trois*** *choses, dans cet ordre :*

- *g est continue (resp. dérivable) sur un intervalle I,*
- *$g(I) \subset J$, avec J un intervalle*
- *h est continue (resp. dérivable) sur J,*

Ici on $h : x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $J = \mathbb{R}_+$ (resp. dérivable sur $J = \mathbb{R}_+^*$).

Partie B : dérivée et tableau de variations

1) Soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. On a
$$f'(x) = 2 + \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{2\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}} = \boxed{\frac{g(x)}{\sqrt{x^2-1}}}.$$

2) La fonction g est définie sur l'intervalle $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ pour les mêmes raisons que f l'est.

   Si $x > 1$, alors $g(x) > 0$ en tant que somme de réels strictement positifs. Supposons que $x < -1$. Puisque les fonctions carrées et racines carrées sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$, nous avons
$$g(x) > 0 \iff 2\sqrt{x^2-1} > -x \iff x^2 - 1 > \frac{x^2}{4} \iff x^2 > \frac{4}{3} \iff -x = |x| > \frac{2}{\sqrt{3}}.$$
   et
$$g(x) = 0 \iff 2\sqrt{x^2-1} = -x \iff x^2 - 1 = \frac{x^2}{4} \iff x^2 = \frac{4}{3} \iff x = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$
   Remarquons qu'on a bien $-2/\sqrt{3} < -1$.

   Ainsi $\boxed{g \text{ est strictement positive sur }]-\infty, 2/\sqrt{3}[\cup]1, +\infty[\text{, strictement négative sur }]2/\sqrt{3}, -1[}$ $\boxed{\text{et ne s'annule qu'en } 2/\sqrt{3}.}$

3) On calcule que $f(-1) = -3$, $f(1) = 1$ et $f(-2/\sqrt{3}) = -1 - \sqrt{3}$.

   Puisqu'une racine, si elle est bien définie, est toujours positive, le signe de f' est le même que le signe de g sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Nous en déduisons le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-2/\sqrt{3}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$		$\|$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-1-\sqrt{3}$	$\searrow$	-3		1	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : on a déjà ajouté les limites en $\pm\infty$ que l'on va déterminer dans la partie suivante.

Partie C : limites et asymptotes

1) Nous avons $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)=+\infty$ et $\lim\limits_{u\to+\infty}\sqrt{u}=+\infty$ si bien que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$, nous obtenons finalement $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.}$

2) a) Soit $x\in\,]-\infty,-1[$. En particulier $x\neq 0$ et donc on a

$$f(x)=2x-1+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=-1+2x+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=-1+2x-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\boxed{-1+xh(x)}$$

avec $\boxed{h:x\longmapsto 2-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$.

b) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$ et que la fonction racine carrée est continue en 1, nous obtenons $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=1$. Nous en déduisons que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=1}$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.}$

3) cf. tableau ci-dessus.

4) Pour tout $x>1$, en multipliant par la partie conjuguée $\sqrt{x^2-1}-x\neq 0$, on obtient

$$f(x)-(3x-1)=\sqrt{x^2-1}-x=\frac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=+\infty$, nous obtenons alors que $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(3x-1)\big)=0$. Ainsi $\boxed{\text{la droite } y=3x-1 \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_f \text{ en } +\infty.}$ De plus,

$$\forall x\in\,]1,+\infty[,\qquad f(x)-(3x-1)\leqslant 0$$

donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de son asymptote.}}$

5) Pour tout $x<-1$, en multipliant par la partie conjuguée $x-\sqrt{x^2-1}\neq 0$, on obtient

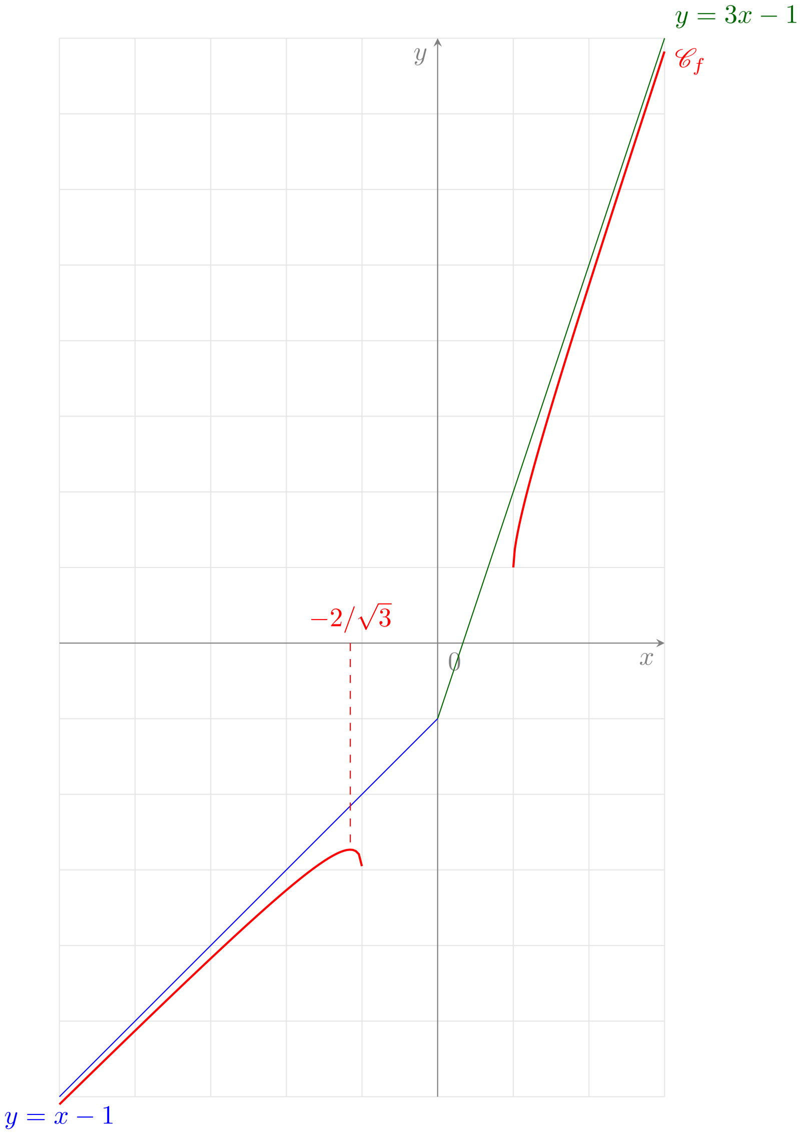
$$f(x)-(x-1)=x+\sqrt{x^2-1}=\frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=-\infty$, nous obtenons alors que $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-(x-1)\big)=0$. Ainsi $\boxed{\text{la droite } y=x-1 \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_f \text{ en } -\infty.}$ De plus,

$$\forall x\in\,]-\infty,-1[,\qquad f(x)-(x-1)\leqslant 0$$

donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de son asymptote.}}$

6) Nous pouvons alors tracer $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé :



Exercice 3 : inégalité arithmético-géométrique

---

1) Notons $\psi : x \longmapsto \ln(x) - x + 1$. Il s'agit d'une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\psi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 \geqslant x.$$

Nous en déduisons que ψ est croissante sur $]0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. Par ailleurs, $\psi(1) = \ln(1) - 1 + 1 = 0$. Nous en déduisons que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\boxed{\ln(x) \leqslant x - 1}$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ avec $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Nous avons

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{m}nm - n = n - n = 0.}$$

3) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{x_k}{m}$ est un réel strictement positif donc la question 1 entraîne que $\ln\left(\dfrac{x_k}{m}\right) \leqslant \dfrac{x_k}{m} - 1$. En sommant ces inégalités, nous obtenons $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right) = 0.}$

Nous en déduisons que $\ln\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{x_k}{m}\right) \leqslant 0$. Puisque la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{x_k}{m} \leqslant \exp(0) = 1$. En multipliant par le réel strictement positif m^n, nous obtenons $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_k \leqslant m^n$. Enfin puisque la fonction racine n-ième est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, nous obtenons que $\boxed{\sqrt[n]{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_k} \leqslant m}$. D'où l'inégalité arithmético-géométrique.

4) Appliquons l'inégalité avec $x_k = k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Nous obtenons finalement $\boxed{n! \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n}$ puisque la fonction puissance $n^{\text{ième}}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.