Devoir maison n° 2

À rendre le lundi 24 septembre 2018

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \sum_{i=k+1}^{2k} i$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k!} \frac{6^{n-k}}{(n-k)!}$.
3) Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée (on essaiera de factoriser au maximum l'expression).
   a) $f : a \longmapsto (a^{\sqrt{5}} - 1)^{6/11}$.
   b) $g : y \longmapsto \ln(|2y^2 + 9y - 5|)$.
   c) $h : z \longmapsto \tan\left(\dfrac{\pi}{2} e^{-z^2}\right)$.
   d) $\xi : t \longmapsto \dfrac{\pi^t}{t}$.
   e) $\psi : \theta \longmapsto \cos(2\sin(3\cos(4\theta)))$
   f) $\varphi : x \longmapsto x^{x^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

   Pour la fonction φ, on limitera l'étude à l'intervalle $]0, +\infty[$... même si on peut poser $0^\alpha = 0$ lorsque $\alpha > 0$.

Exercice 2 : Une étude de fonction

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction $f : x \longmapsto 2x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}$.

Partie A : domaine de définition, continuité, dérivabilité

1) Montrer que f est définie sur $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
2) Justifier proprement que :
   a) f est continue sur les intervalles $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$,
   b) f est dérivable sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$.

Partie B : dérivée et tableau de variations

1) Soit $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g(x) : x \longmapsto x + 2\sqrt{x^2 - 1}$.
2) Déterminer le signe de g sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
3) En déduire le tableau de variations de f.

Partie C : limites et asymptotes

1) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
2) a) Déterminer une fonction h définie sur $]-\infty, -1[$ telle que

$$\forall x \in]-\infty, -1[, \qquad f(x) = -1 + x\,h(x).$$

   b) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} h(x)$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

3) Compléter alors le tableau de variations de f.

4) Montrer que
$$\forall x \in]1,+\infty[, \qquad f(x) - 3x + 1 = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}.$$
En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ dont on précisera l'équation et la position relative par rapport à $\mathscr{C}_f$.

5) Montrer que
$$\forall x \in]-\infty,-1[, \qquad f(x) - x + 1 = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}.$$
En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $-\infty$ dont on précisera l'équation et la position relative par rapport à $\mathscr{C}_f$.

6) Tracer la courbe représentative de f.
On fera notamment apparaitre les asymptotes.

Exercice 3 : inégalité arithmético-géométrique

(extrait du DS n° 1 de l'an passé)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Le but de cet exercice est de montrer l'inégalité dite arithmético-géométrique :
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$
Cette inégalité affirme que la moyenne géométrique de $x_1, \dots, x_n$ est inférieure à la moyenne arithmétique de $x_1, \dots, x_n$.

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.
2) Notons $m = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m}-1\right) = 0$.
3) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leqslant 0$ et conclure.
4) Application : montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.