Correction du DM n$^{\text{o}}$ 1

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ trois propositions. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \quad &\iff \quad \text{non}(\mathcal{A}) \text{ ou } (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \\ &\iff \quad \text{non}(\mathcal{A}) \text{ ou } (\text{non}(\mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C}) \\ &\iff \quad \big(\text{non}(\mathcal{A}) \text{ ou non}(\mathcal{B})\big) \text{ ou } \mathcal{C} \\ &\iff \quad \text{non}(\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \text{ ou } \mathcal{C} \\ &\iff \quad (\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}. \end{aligned}$$

On a utilisé la commutativité du ou à la troisième équivalence et une loi de Morgan à la quatrième.

2) La négation de la phrase est :

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0, \quad \exists x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall \delta > 0, \quad \exists y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(x < y < x + \delta \quad \text{et} \quad \ln\left(\frac{y}{x}\right) > \varepsilon\right).}$$

3) a) Soit x un réel. Le terme $\sqrt{x+1}$ est défini si et seulement si $x+1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x > -1$.

Supposons désormais que $x \in [-1, +\infty[$.

- On remarque d'abord que, si $x \in [-1, 1[$, alors $1 - x > 0$ et donc $1 - x + \sqrt{x+1} > 0$.
- Si $x \in [1, +\infty[$, alors on a

$$\begin{aligned} 1 - x + \sqrt{x+1} > 0 \quad &\iff \quad \sqrt{x+1} > x - 1 \\ &\iff \quad x + 1 > (x-1)^2 \qquad (\textit{car } x - 1 \geqslant 0 \textit{ et } \sqrt{1+x} \geqslant 0) \\ &\iff \quad x + 1 > x^2 - 2x + 1 \\ &\iff \quad (3 - x)x > 0 \\ &\iff \quad 3 > x \qquad (\textit{car } x > 0) \end{aligned}$$

A la deuxième équivalence, on a utilisé le fait que la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi $\boxed{1 - x + \sqrt{x+1} > 0 \text{ si et seulement si } -1 \leqslant x < 3.}$

b) *Avant de commencer ce type de questions, on repère les opérations interdites. Il y en a trois successives : on prend la racine de $x+1$ (qui doit donc être positif), on prend le logarithme népérien de $1-x+\sqrt{x+1}$ (qui doit donc être strictement positif). On prend l'inverse de $\ln(1 - x + \sqrt{x+1})$ (qui doit donc être non nul, c'est-à-dire $1 - x + \sqrt{x+1} \neq 1$. Ensuite il suffit de rédiger cela proprement.*

On suppose donc que $x \in [-1, 3[$ afin que $\ln(1 - x + \sqrt{x+1})$ soit bien défini. Ensuite le terme $f(x)$ est bien défini si et seulement si $\ln(1 - x + \sqrt{x+1}) \neq 0$, c'est-à-dire $1 - x + \sqrt{x+1} \neq 1$ (puisque $\ln$ ne s'annule qu'en 1).

- Si $x \in [-1, 0[$, alors on a $-x + \sqrt{x+1} \neq 0$ (ce terme étant strictement positif).
- Si $x \in [0, +\infty[$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} 1 - x + \sqrt{x+1} = 1 \quad &\iff \quad \sqrt{x+1} = x \\ &\iff \quad x + 1 = x^2 \qquad (\textit{car } x \geqslant 0 \textit{ et } \sqrt{1+x} \geqslant 0) \\ &\iff \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

En effet le discriminant du trinôme $X^2 - X - 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4(-1) = 5$ si bien que $x^2 - x - 1 = 0$ si et seulement si $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (mais ce dernier cas est exclu puisque $x \geqslant 0$).

Ainsi $\ln(1-x+\sqrt{x+1}) \neq 0$ si et seulement si $x \neq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Finalement, nous en déduisons que $\boxed{D_f = \left[-1, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 3\right[.}$

4) Si un réel x est une solution de l'inéquation $x^6 + \dfrac{36}{x^2} > 13x^2$, alors x est différent de 0.

Supposons que $x \neq 0$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} x^6 + \frac{36}{x^2} > 13x^2 \quad &\iff \quad x^8 + 36 > 13x^4 \qquad\qquad (\textit{car } x^2 > 0) \\ &\iff \quad \begin{cases} y^2 - 13y + 36 > 0 \\ y = x^4 \end{cases} \end{aligned}$$

Le trinôme $X^2 - 13X + 36$ admet pour discriminant $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 36 = 25 > 0$. Il admet donc deux racines réelles : $\dfrac{13+\sqrt{25}}{2} = 9$ et $\dfrac{13-\sqrt{25}}{2} = 4$. Par conséquent $y^2 - 13y + 36 > 0$ si et seulement si $y \in]-\infty, 4[\cup]9, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned} x^6 + \frac{36}{x^2} > 13x^2 \quad &\iff \quad x^4 < 4 \text{ ou } x^4 > 9 \\ &\iff \quad x^2 < 2 \text{ ou } x^2 > 3 \\ &(\textit{car } t \mapsto \sqrt{t} \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+) \\ &\iff \quad |x| < \sqrt{2} \text{ ou } |x| > \sqrt{3} \\ &(\textit{car } t \mapsto \sqrt{t} \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est }]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{2}, 0| \cup]0, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[.}$

5) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On commence par décomposer selon que $i < j$, $j < i$ ou $i = j$:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{\min(i,j)} &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2^{\min(i,j)} + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} 2^{\min(i,j)} + \sum_{i=1}^{n} 2^{\min(i,i)} \\ &= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2^i + \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} 2^j + \sum_{i=1}^{n} 2^i = 2 \times \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2^i + \sum_{i=1}^{n} 2^i. \end{aligned}$$

On remarque en effet qu'échanger les indices i et j dans la première somme la rend égale à la deuxième somme. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{\min(i,j)} = 2 \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} 2^i \right) + \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} - 1 &= 2 \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{1-2^j}{1-2} - 1 \right) + 2^{n+1} - 2 \\ &= 2 \sum_{j=2}^{n} \left(2^j - 2 \right) + 2^{n+1} - 2 \\ &= 2 \sum_{j=2}^{n} 2^j - 4(n-1) + 2^{n+1} - 2. \end{aligned}$$

On a $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} 2^j = \sum_{j=0}^{n} 2^j - 2^0 - 2^1 = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 3 = 2^{n+1} - 4$ si bien que

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{\min(i,j)} = 2^{n+2} - 8 - 4n + 4 + 2^{n+1} - 2 = (2+1)2^{n+1} - 4n - 5 = \boxed{3 \cdot 2^{n+1} - 4n - 6.}$$

1) La fonction f_n est polynomiale donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $g_k : x \longmapsto x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g_k'(x) = \begin{cases} kx^{k-1} & \text{si} \quad k \geqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad k = 0. \end{cases}$$

Puisque $f_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$, on en déduit que $f_n' = \sum_{k=0}^{n} g_k$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.}$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1-x} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ n+1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}}$$

3) En dérivant cette autre expression, nous obtenons que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,

$$f_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

et donc $\boxed{f_n'(x) = \dfrac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}.}$

4) Fixons $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$P(n) \ : \ « \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}. »$$

- *Initialisation :* On a $\sum_{k=1}^{1} kx^{k-1} = 1 = \dfrac{1 + x^2 - 2x}{(1-x)^2}$ donc $P(1)$ est vraie.
- *Hérédité :* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} + (n+1)x^n = \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2} + (n+1)x^n,$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Mettons l'expression de droite sous la même dénominateur :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} &= \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n + (n+1)x^n(1-x)^2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 + nx^{n+1} - (n+1)x^n + (n+1)x^n - 2(n+1)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, nous en déduisons que $\boxed{P(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

5) Si $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = x \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{x + nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Si $x = 1$, alors $\sum_{k=1}^{n} kx^k = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1) a) On calcule que $\boxed{u_1 = -1,\ u_2 = 3 \text{ et } u_3 = 19.}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, posons $P(n)$: « $u_n \in \mathbb{N}^*$ ». Procédons par récurrence :

- *Initialisation :* On a $u_2 = 3 \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire $P(2)$ est vraie.
- *Hérédité :* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$. On a donc $u_n \in \mathbb{N}^*$. Nous en déduisons que $u_{n+1} = 3u_n + 4n + 2$ est un entier naturel non nul (en effet $\mathbb{N}^*$ est stable par addition et par multiplication). Ainsi $P(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, nous obtenons que $\boxed{P(n) \text{ est vraie pour tout entier naturel } n \geqslant 2.}$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $u_{n+1} - u_n = 2u_n + 4n + 2 > 0$ puisque $u_n > 0$ d'après la question précédente. On a de plus $u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2$, si bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}+1}{3^n} - \frac{u_n+1}{3^{n-1}} = \frac{u_{n+1}+1-3(u_n+1)}{3^n} = \frac{u_{n+1}-3u_n-2}{3^n} = \frac{4n+2-2}{3^n}$$

et donc $\boxed{v_{n+1} - v_n = \dfrac{4n}{3^n}.}$

b) On peut procéder par récurrence... ou utiliser le résultat du cours sur les sommes télescopiques : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} = v_1 + \sum_{k=1}^{n} \left(v_{k+1} - v_k\right) = \frac{u_1+1}{3^0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{3^k} = 0 + 4\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = 4\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k},$$

puisque le premier terme de la somme est nul. Enfin, si $n = 0$, alors $v_{n+1} = v_1 = 0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{k}{3^k}$.
$\boxed{\text{La formule est donc vraie pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} w_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1) + 2 = u_{n+1} + 2n + 4 &= 3u_n + 4n + 2 + 2n + 4 \\ &= 3u_n + 6n + 6 = 3(u_n + 2n + 2) = 3w_n. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } 3.}$

b) Nous en déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 3^n w_0 = 3^n$ et donc

$$\boxed{u_n = w_n - 2n - 2 = 3^n - 2(n+1).}$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{v_{n+1}}{4} = \frac{u_{n+1}+1}{4\cdot 3^n} = \frac{3^{n+1} - 2(n+2) + 1}{4\cdot 3^n} = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4\cdot 3^n} = \boxed{\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}.}$$

5) En appliquant la formule de l'exercice précédent avec $x = 1/3$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} &= \frac{1}{3}\,\frac{1 + n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3}\,\frac{9}{4}\left(1 + n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right) \\ &= \frac{3}{4}\left(1 + \frac{n - 3(n+1)}{3^{n+1}}\right) \\ &= \boxed{\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}.} \end{aligned}$$

Exercice 4 : Factorisations de $x^n - y^n$ et $x^n + y^n$

Soient x et y des nombres complexes.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$: « $x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k$. » Procédons par récurrence.

- *Initialisation.* On a $x^1 - y^1 = (x-y) = (x-y)\sum_{k=0}^{1-1} x^{1-1-k}y^k$ donc $P(1)$ est vraie.
- *Hérédité.* Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\begin{aligned} x^{n+1} - y^{n+1} &= x\left(y^n + (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k\right) - y^{n+1} = (x-y)\left(y^n + x\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k\right) \\ &= (x-y)\left(y^n + \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}y^k\right) = (x-y)\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}y^k \end{aligned}$$

  car $y^n = x^{n-n}y^n$. Par conséquent $P(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion.* Par récurrence $\boxed{P(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

2) Soit n impair. En appliquant la formule de la question précédente avec y et $-x$, on a

$$x^n + y^n = x^n - (-y)^n = (x-(-y))\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}(-y)^k = \boxed{(x+y)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{n-1-k}y^k}.$$

3) Soient x et y des nombres complexes.
- Si $n = 2$, on retrouve l'identité remarquable $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.
- Si $n = 3$, on obtient $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ et $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$.
- Si $n = 4$, on obtient $x^4 - y^4 = (x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$.