Devoir maison n$^{\text{o}}$ 12

À rendre le jeudi 14 février 2019

Il possible et même encouragé de travailler en groupes de 2 ou 3 élèves et de me rendre une copie par groupe. Chaque élève du groupe devra avoir rédigé une partie du sujet.

Exercice 1 : Equivalents et limites

1) Déterminer un équivalent simple de $x \longmapsto \dfrac{x\,\mathrm{Arctan}(2x)(\sqrt[5]{1+3x}-1)}{1+x^2-\cos(\sqrt{x})}$ en 0^+.

2) Déterminer un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n}\,\big(\ln(n)\big)^{10!} + \mathrm{Arctan}(n!) + 7n^2 + 5n^3e^{-n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3) Déterminer un équivalent simple de $x_n = 1 - \sqrt[9]{1 + \dfrac{1}{\sqrt[6]{n}}\ln\left(1+\sin^2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4) a) Soit $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer un équivalent simple de $\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)\right)^n$ en fonction de $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$.

5) a) Déterminer un équivalent de $u : t \longmapsto \dfrac{2\tan(t)}{1-\tan(t)}$ au voisinage de 0.
   b) Vérifier que, pour tout $x \in \,]-\pi/4, \pi/4[$, $\tan(x) = 1 + u\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
   c) Calculer alors $\displaystyle\lim_{x\to\pi/4}\Big(\tan(x)\Big)^{1/(4x-\pi)}$.

Exercice 2 : Fonctions absolument monotones

Adapté d'un DS de l'an passé.

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et non réduit à un point. On dit qu'une fonction f définie sur I et à valeurs réelles est absolument monotone (AM en abrégé) si f est de classe C^∞ sur I et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in I, \qquad f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Partie A : Exemples et premières propriétés des fonctions AM

1) Soient f et g deux fonctions AM. Montrer que $f+g$ et fg sont AM. L'ensemble des fonctions AM est-il un espace vectoriel ?

2) Montrer que $\exp$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ sont AM sur des intervalles à préciser.

3) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ afin que la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ soit AM sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \dfrac{\tan^{(n)}(x)}{n!}$.
   a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1)a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.
   b) En déduire que $\tan$ est AM sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Partie B : Développement en série entière des fonctions AM

Soit f une fonction AM sur un intervalle $I =]-R, R[$ pour un certain $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Le but de cette partie est de montrer que,

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

On dit alors que f est développable en série entière au voisinage de 0.

1) Soient a et b deux réels tels que $0 \leqslant a < b < R$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leqslant f(b)$.
   b) Montrer alors que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
   c) En déduire que $\dfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = S_{n+1} - S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

2) a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, R[$. Montrer que
$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x).$$
   b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-R, 0]$. Montrer que
$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right| \leqslant \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0).$$
   c) En déduire que, pour tout $x \in]-R, R[$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$.

   Il y a ici une erreur d'énoncé : pour appliquer la question 2a directement, il faut ajouter l'hypothèse que $R = +\infty$. Une preuve dans le cas où $R < +\infty$ est proposée dans le corrigé.

Exercice 3 : Méthode de Newton

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$ et à valeurs réelles vérifiant

- il existe $x^* \in]a, b[$ tel que $f(x^*) = 0$,
- f' ne s'annule pas sur $[a, b]$.

On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_0 \in]a, b[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

On admet que si l'on choisit $x_0 \in I$ suffisamment proche de x^*, alors la suite est bien définie et tous ses termes appartiennent à $]a, b[$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $|x_0 - x^*| \leqslant \varepsilon$, alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x^* à vitesse quadratique, c'est-à-dire

$$\exists K > 0, \quad \exists \lambda \in]0, 1[, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |x_n - x^*| \leqslant K \lambda^{2^n}.$$

1) Posons $\varphi : x \in [a, b] \longmapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Remarquer que x^* est un point fixe de φ.
2) Justifier l'existence de $m > 0$ et $M > 0$ tels que, pour tout $x \in [a, b]$, $|f'(x)| \geqslant m$ et $|f''(x)| \leqslant M$.
3) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que
$$\forall x \in [a, b], \qquad |\varphi(x) - x^*| \leqslant \frac{M}{2m} |x - x^*|^2.$$
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \dfrac{M}{2m}|x_n - x^*|$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0^{2^n}$.
5) Conclure.

Ce résultat nous fournit une méthode algorithmique pour déterminer une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 0$. Nous mettrons en œuvre cette méthode avec Scilab dans le TP 9.