Correction du DM n$^{\text{o}}$ 11

Exercice 1 : Inversibilité de la matrice de Hilbert

Partie A : Cas où $n=2$ ou $n=3$

1) Si $n=2$, alors $H=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$. On a $\Delta = 1\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}\neq 0$. Ainsi H est inversible et

$$H^{-1}=12\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}4 & -6\\ -6 & 12\end{pmatrix}=H^{-1}}.$$

2) Si $n=3$, alors $H=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$. donc $60H=\begin{pmatrix}60 & 30 & 20\\ 30 & 20 & 15\\ 20 & 15 & 12\end{pmatrix}$.

Effectuons la méthode de Gauss-Jordan :

$$(H|\mathrm{I}_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}60 & 30 & 20 & 1 & 0 & 0\\ 30 & 20 & 15 & 0 & 1 & 0\\ 20 & 15 & 12 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}60 & 30 & 20 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 10 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 15 & 16 & -1 & 0 & 3\end{array}\right)\quad \begin{array}{l} \\ L_2\leftarrow 2L_2-L_1\\ L_3\leftarrow 3L_3-L_1\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}60 & 30 & 20 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 10 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -6 & 6\end{array}\right)\quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3\leftarrow 2L_3-3L_2\end{array}$$

A ce stade, on remarque que la diagonale est constituée de réels non nuls. Ainsi $60H$ est inversible. Continuons le pivot de Gauss. On obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}60 & 30 & 0 & -9 & 60 & -60\\ 0 & 10 & 0 & -6 & 32 & -30\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -6 & 6\end{array}\right)\quad \begin{array}{l}L_1\leftarrow L_1-10L_3\\ L_2\leftarrow L_2-5L_3\\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}60 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30\\ 0 & 10 & 0 & -6 & 32 & -30\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -6 & 6\end{array}\right)\quad \begin{array}{l}L_1\leftarrow L_1-3L_2\\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}60 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30\\ 0 & 60 & 0 & -36 & 192 & -180\\ 0 & 0 & 60 & 30 & -180 & 180\end{array}\right)\quad \begin{array}{l} \\ L_2\leftarrow 6L_2\\ L_3\leftarrow 30L_3\end{array}$$

Ainsi $(60H)^{-1}=\frac{1}{60}\begin{pmatrix}9 & -36 & 30\\ -36 & 192 & -180\\ 30 & -180 & 180\end{pmatrix}$ et donc $\boxed{H^{-1}=\begin{pmatrix}9 & -36 & 30\\ -36 & 192 & -180\\ 30 & -180 & 180\end{pmatrix}}$ puisque $H^{-1}=60\cdot(60H)^{-1}$.

Partie B : Cas général

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $HX = \mathrm{O}_{n,1}$.

1) $\boxed{\text{On doit montrer que } x_1 = \cdots = x_n = 0}$ pour en déduire que $X = \mathrm{O}_{n,1}$ et conclure, avec le critère des noyaux, que H est inversible.

2) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. La $i^{\text{ième}}$ ligne du système d'équations correspondant à l'équation $HX = \mathrm{O}_{n,1}$ est $(HX)_i = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{0 = \sum_{j=1}^{n} h_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_i}{i+j-1}.}$$

3) a) Soient $j \in [\![0, n-1]\!]$ et $i \in [\![1, n]\!]$. On a $L_j(i) = \displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ k \neq j}} (i+k) = \frac{1}{i+j} \prod_{i=0}^{n-1} (i+k) = \frac{1}{i+j} \prod_{\ell=i}^{i+n-1} \ell$ donc $\boxed{L_j(i) = \dfrac{(i+n-1)!}{(i-1)!(i+j)}}$.

b) Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg(L_j) = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ k \neq j}} \deg(X+k) = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ k \neq j}} 1 = n-1.$

Or $\deg(P) \leqslant \displaystyle\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \big(\deg(x_j L_{j-1})\big)$ donc $\boxed{\deg(P) \leqslant n-1}$.

c) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a $P(i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j L_{j-1}(i) = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!(i+j-1)} = \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{i+j-1}$ donc $\boxed{P(i) = 0}$.

Le polynôme P possède donc n racines distinctes (les entiers $1, 2, \ldots, n$) et son degré est inférieur ou égal à $n-1$. Nous en déduisons que $\boxed{P \text{ est le polynôme nul}}$.

d) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On a $L_{i-1}(-i+1) = \displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ k \neq i-1}} (-i+1+k) \neq 0$ et, si $i \neq j$, $L_{j-1}(-i+1) = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![0, n-1]\!],\ P(-i) = L_{i-1}(-i+1)\, x_{i+1}}$.

e) Puisque P est le polynôme nul, on obtient que $\boxed{x_1 = \cdots = x_n = 0 \text{ et donc } H \text{ est inversible}}$.

Partie C : Calcul de la somme des coefficient de H^{-1}

1)
- Si $n = 2$, on calcule que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j} = 4 - 6 - 6 + 12 = 4$ soit $\boxed{\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j} = 2^2}$.
- Si $n = 3$, on calcule que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j} = 9 - 36 + 30 - 36 + 192 - 180 + 30 - 180 + 180 = 9$ soit $\boxed{\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j} = 3^2}$.

2) On a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $y_i = (H^{-1}U)_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} s_{i,j} (U)_j = \sum_{j=1}^{n} s_{i,j}$. En sommant, on obtient

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} s_{i,j}.}$$

3) a) Puisque, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg(L_j) = n-1$, on a $\deg(S) \leqslant n-1$.

Par ailleurs $\deg\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X+k)\right) = n$ donc $\boxed{\deg(Q) = n}$. Enfin le coefficient dominant de Q est celui de $-\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X+k)$, c'est-à-dire $\boxed{-1}$.

b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comme dans la partie précédente, on a

$$S(i) = \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!} \sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{i+j-1} = \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!}(HY)_i = \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!}(U)_i = \frac{(i+n-1)!}{(i-1)!} = \prod_{k=0}^{n-1}(i+k).$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ Q(i) = S(i) - \prod_{k=0}^{n-1}(i+k) = 0}$.

c) Puisque Q est de degré n, unitaire et admet $1, 2, \ldots, n$ pour racines, on en déduit que $\boxed{Q = -\prod_{i=1}^{n}(X-i)}$.

4) a) Le coefficient d'indice $n-1$ de $\prod_{k=0}^{n-1}(X+k) - \prod_{k=1}^{n}(X-k)$ est égal à

$$\sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n}(-k) = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = \boxed{n^2}.$$

b) Le coefficient d'indice $n-1$ de S est $\sum_{j=1}^{n} y_j$ puisque, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, L_j est unitaire de degré $n-1$. Par ailleurs

$$S = Q + \prod_{k=0}^{n-1}(X+k) = -\prod_{k=1}^{n}(X-k) + \prod_{k=0}^{n-1}(X+k)$$

donc, la question précédente entraîne que $\boxed{\sum_{j=1}^{n} y_j = n^2}$, d'où le résultat attendu.

Exercice 2 : Que du classique !

1) Déjà on a $0 + 2 \cdot 0 = 0 - 4 \cdot 0$ et $0 + 3 \cdot 0 = 5 \cdot 0$ donc $(0, 0, 0, 0) \in F$. Ensuite donnons-nous $(x, y, z, t) \in F$, $(x', y', z', t') \in F$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t')$$

et

- $(\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') = \lambda(x + 2y) + \mu(x' + 2y') = \lambda(z - 4t) + \mu(z' - 4t') = (\lambda z + \mu z') - 4(\lambda t + \mu t')$,
- $(\lambda y + \mu y') + 3(\lambda t + \mu t') = \lambda(y + 3t) + \mu(y' + 3t') = \lambda(5z) + \mu(5z') = 5(\lambda z + \mu z')$.

Ainsi $\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t') \in F$ et donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4.}$

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned}
(x, y, z, t) \in F \quad &\iff \quad \begin{cases} x + 2y = z - 4t \\ y = 5z - 3t \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} x = -9z + 2t \\ y = 5z - 3t \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\
&\iff \quad (x, y, z, t) = z(-9, 5, 1, 0) + t(2, -3, 0, 1)
\end{aligned}$$

Ainsi la famille $\big((-9, 5, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\big)$ est génératrice de F. Montrons qu'elle est libre : donnons-nous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha(-9, 5, 1, 0) + \beta(2, -3, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$. En regardant la troisième (resp. quatrième) coordonnée, on obtient $\alpha = 0$ (resp. $\beta = 0$). Ainsi la famille est libre.

Ainsi $\boxed{\big((-9, 5, 1, 0), (2, -3, 0, 1)\big) \text{ est une base de } F}$.

2) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Le vecteur (x,y,z) appartient à F si et seulement si il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$(x,y,z)=\alpha(1,5,1)+\beta(4,-1,-3).$$

Autrement si $(x,y,z)\in F$ si et seulement si le système

$$(S)\qquad \begin{cases}\alpha & + & 4\beta & = & x\\ 5\alpha & - & \beta & = & y\\ \alpha & - & 3\beta & = & z\end{cases}$$

d'inconnue (α,β) admet (au moins) une solution. Or on a :

$$\begin{aligned}(S) \qquad &\iff \begin{cases}\alpha + 4\beta = x\\ \quad - 21\beta = y-5x & L_2\leftarrow L_2-5L_1\\ \quad - 7\beta = z-x & L_3\leftarrow L_3-L_1\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\alpha + 4\beta = x\\ \quad - 21\beta = y-5x\\ \quad 0 = 3(z-x)-(y-5x) & L_3\leftarrow 3L_3-L_2\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\alpha + 4\beta = x\\ \quad - 21\beta = y-5x\\ \quad 0 = 2x-y+3z\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi le système (S) admet (au moins une solution) si et seulement si $2x-y+3z=0$ (en effet, dans ce cas, $\beta=\dfrac{5x-y}{21}$ et $\alpha=x-4\beta=\dfrac{x+4y}{21}$).

Nous en déduisons que $\boxed{2x-y+3z=0 \text{ est une équation de } F}$

Exercice 3 : Étude d'un sous-espace vectoriel de matrices

1) Commençons par remarquer que $\mathrm{O}_3=\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}$ avec $(a,b,c)=(0,0,0)$ si bien que $\mathrm{O}_3\in\mathcal{A}$.

Ensuite donnons-nous $M=\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}$ et $M'=\begin{pmatrix}0&-c'&b'\\c'&0&-a'\\-b'&a'&0\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{A}$, ainsi que $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$M+M'=\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-c'&b'\\c'&0&-a'\\-b'&a'&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-(c+c')&b+b'\\c+c'&0&-(a+a')\\-(b+b')&a+a'&0\end{pmatrix}\in\mathcal{A}.$$

et

$$\lambda M=\lambda\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-(\lambda c)&\lambda b\\\lambda c&0&-(\lambda a)\\-(\lambda b)&\lambda a&0\end{pmatrix}\in\mathcal{A}.$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{A}\text{ est un sous-espace vectoriel de }\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

2) Notons $A=E_{3,2}-E_{2,3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B=E_{1,3}-E_{3,1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$ et

$C=E_{2,1}-E_{1,2}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Si $(a,b,c)\in\mathbb{R}^*$, alors $\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}=a\,A+b\,B+c\,C.$

Nous en déduisons que $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(A, B, C)$. Montrons que la famille $\mathcal{B} = (A, B, C)$ est libre : donnons-nous $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a\,A + b\,B + c\,C = \mathrm{O}_n$. On a alors

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $a = b = c = 0$. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre. Puisqu'elle engendre $\mathcal{A}$, nous en déduisons que $\boxed{(A, B, C) \text{ est une base de } \mathcal{A}}$.

3) *Méthode 1.* Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- Si $b = 0$, alors $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$.
  - — Si $c = 0$ alors, en échangeant les lignes 1 et 3, on obtient une matrice dont la diagonale est nulle. La matrice M n'est donc pas inversible dans ce cas.
  - — Si $c \neq 0$ alors, en échangeant les lignes 1 et 2, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} c & 0 & -a \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$. En faisant l'opération $L_3 \leftarrow cL_3 + aL_2$, on obtient $\begin{pmatrix} c & 0 & -a \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'étant pas inversible (sa diagonale contient un 0), on en déduit que la matrice M non plus.
- Si $b \neq 0$ alors, en échangeant les lignes 1 et 3, puis en faisant l'opération $L_2 \leftarrow bL_2 + cL_1$, on obtient $\begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ 0 & ac & -ab \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$.
  - — Si $a = 0$, alors en échangeant les lignes 2 et 3 on obtient une matrice triangulaire dont la diagonale contient 0. On en déduit que M n'est pas inversible.
  - — Si $a \neq 0$ alors, on faisant l'opération $L_3 \leftarrow aL_3 + L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ 0 & ac & -ab \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi M n'est pas inversible.

Finalement aucune matrice de $\mathcal{A}$ n'est inversible. On a bien $\boxed{\mathcal{A} \cap \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) = \varnothing}$.

Méthode 2. On remarque que, si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors le vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est non nul et vérifie

$$MX = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le critère des noyaux entraîne alors que M n'est pas inversible. Et si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, alors M est la matrice nulle donc n'est pas inversible.

4) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$.

a) On calcule que $\boxed{M^2 = \begin{pmatrix} -(b^2 + c^2) & ab & ac \\ ab & -(a^2 + c^2) & bc \\ ac & bc & -(a^2 + b^2) \end{pmatrix}}$ et

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & c(a^2 + b^2 + c^2) & -b(a^2 + b^2 + c^2) \\ -c(a^2 + b^2 + c^2) & 0 & a(a^2 + b^2 + c^2) \\ b(a^2 + b^2 + c^2) & -a(a^2 + b^2 + c^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

donc $\boxed{M^3 = -(a^2 + b^2 + c^2)M \in \mathcal{A}}$.

b) Puisque $M = a\,A + b\,B + c\,C$ et que $M^3 = -(a^2+b^2+c^2)M$, on en déduit que le triplet de cordonnées de M^3 dans $\mathcal{B}$ est $\boxed{(-a(a^2+b^2+c^2), -b(a^2+b^2+c^2), -c(a^2+b^2+c^2))}$.

c) On obtient également que $M^3 + (a^2+b^2+c^2)M = \mathrm{O}_3$. Par conséquent $\boxed{\text{le polynôme } X^3 + (a^2+b^2+c^2)X \text{ annule } M}$.

d) On a $\boxed{M^0 = \mathrm{I}_3,\ M^1 = M}$, $M^2 = M^2$, $M^3 = -(a^2+b^2+c^2)M$, puis

$$M^4 = M^3\,M = -(a^2+b^2+c^2)M^2,$$

$$M^5 = M^4\,M = -(a^2+b^2+c^2)M^3 = (a^2+b^2+c^2)^2 M,$$

$$M^6 = M^5\,M = (a^2+b^2+c^2)^2 M^2,$$

$$M^7 = M^6\,M = (a^2+b^2+c^2)^2 M^3 = -(a^2+b^2+c^2)^3 M.$$

Par récurrence immédiate, on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{M^{2k} = (-1)^{k-1}(a^2+b^2+c^2)^{k-1}M^2 \qquad \text{et} \qquad M^{2k+1} = (-1)^k(a^2+b^2+c^2)^k M.}$$